Math. Z. 241, 375–396 (2002)
Digital Object Identifier (DOI) 10.1007/s002090200420

Mathematische Zeitschrift

Lieu singulier des surfaces rationnelles réglées

Nicolas Perrin

Université de Versailles, 45 avenue des États-Unis, 78035 Versailles Cedex, France
(e-mail: perrin@math.uvsq.fr)

Received: 9 October 2001; in final form: 10 December 2001 /
Published online: 29 April 2002 –

Introduction

L'objectif de cet article est de montrer qu'une *surface rationnelle réglée paramétrée* est déterminée par son *lieu singulier abstrait* et d'étudier l'ensemble de ces lieux singuliers abstraits.

Nous appelons ici surface réglée toute surface de $\mathbb{P}^3$ recouverte par une famille à une dimension de droites de l'espace, les génératrices de la surface. C'est la notion historique de surface réglée. Une telle surface est définie par une courbe tracée sur la grassmannienne $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}^3$. Elle est rationnelle si la courbe de $\mathbb{G}$ l'est. Son lieu singulier est l'ensemble des points d'intersection de deux génératrices.

Nous nous intéressons aux surfaces rationnelles réglées *paramétrées*. L'ensemble de ces surfaces est représenté par le schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathbb{G}$. Pour tout morphisme f, la surface correspondante est définie par la courbe $f(\mathbb{P}^1)$. La variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est irréductible et lisse de dimension $4d + 4$ (voir par exemple [P1]). Elle est munie d'actions de PGL_2 et de $PO(q)$ où q est la forme quadratique définissant $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{P}^5$. Nous définissons pour $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$:

Définition. *Le lieu singulier abstrait de la surface f est la sous-variété de $S^2\mathbb{P}^1$ qui correspond aux paires de génératrices qui se coupent, on le note $\Psi(f)$.*

Dans la première partie nous étudions le problème suivant :

Problème. *Une surface rationnelle réglée paramétrée f est-elle déterminée par son lieu singulier abstrait $\Psi(f)$?*

Nous supposerons dans la suite que d est supérieur ou égal à 3. Si la surface f ou sa duale est un cône, alors $\Psi(f)$ est $S^2\mathbb{P}^1$ tout entier. Nous écartons ces cas en considérant l'ouvert $\mathbf{R}_d$ de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ des morphismes f tels que l'image $f(\mathbb{P}^1)$ n'est pas contenue dans un plan totalement isotrope pour la forme quadratique q. Nous verrons que, pour tout élément f de $\mathbf{R}_d$, le lieu singulier abstrait $\Psi(f)$ est une courbe de degré $d-2$ de $S^2\mathbb{P}^1$. La variété $\mathbf{R}_d$ est munie d'actions de PGL_2 et $PO(q)$. L'action induite de PGL_4 – identifié à $PSO(q)$ – est l'action du groupe des automorphismes de $\mathbb{P}^3$ sur les surfaces.

Nous étudions le morphisme Ψ qui à un élément de $\mathbf{R}_d$ associe son lieu singulier abstrait et montrons le théorème suivant qui résout le problème ci-dessus :

Théorème 0.1. *Pour $d \geq 3$, le morphisme Ψ est génériquement injectif modulo automorphismes de $\mathbb{P}^3$ et dualité : la fibre générale de Ψ est une orbite sous $PO(q)$. Pour $d \geq 5$ la fibre générale est isomorphe à $PO(q) \simeq PGL_4 \rtimes \{\pm 1\}$.*

Pour prouver ce théorème nous utilisons l'isomorphisme entre $PSO(q)$ et PGL_4 pour avoir deux points de vue sur $\mathbb{G}$. Nous définissons ainsi deux morphismes naturels Ψ et Φ, de $\mathbf{R}_d$ dans l'espace projectif des courbes de degré $d-2$ du plan et montrons qu'ils sont égaux.

Plus précisément, nous décrivons une stratification de la variété $\mathbf{R}_d$ et montrons que Φ et Ψ coïncident sur la plus petite strate. Nous exhibons un plongement projectif de la variété $\mathbf{R}_d$ tel que Φ et Ψ soient linéaires pour ce plongement. La strate minimale engendrant cet espace, nous concluons à l'égalité des morphismes. Le morphisme Φ nous permet de montrer l'injectivité générique.

Dans la seconde partie de ce texte nous utilisons le Théorème 0.1 pour étudier l'image de $\mathbf{R}_d$ par Ψ. Nous obtenons en particulier le résultat suivant :

Théorème 0.2. *Pour $d \geq 6$, l'image du morphisme Ψ est irréductible, normale, de dimension $4d-11$, lisse en codimension $d-5$ et de degré :*

$$\deg(\Psi(\mathbf{R}_d)) = \prod_{k=0}^{d-6} \frac{\binom{d+1+k}{d-5-k}}{\binom{2k+1}{k}} .$$

Il est facile de vérifier que pour d inférieur à 5, le morphisme Ψ est dominant. Nous donnons également une paramétrisation birationnelle de l'image de Ψ en degrés pairs ce qui nous permet d'affirmer :

Proposition 0.1 *Pour d pair la variété $\Psi(\mathbf{R}_d)$ est rationnelle.*

Remerciements. Je tiens ici à remercier mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

Notations. (I) On note S_n la representation irréductible de dimension $n+1$ de PGL_2. On identifie S_n et $\check{S}_n$ grâce à la forme bilinéaire PGL_2-invariante sur S_n (pour plus de détails sur les représentations de PGL_2, voir [SP]).
(II) On note G_a le groupe $\mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a))$ des automorphismes du faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ modulo les homothéties.
(III) Notons V l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. La forme quadratique q définissant $\mathbb{G}$ est donnée par le produit extérieur sur $\Lambda^2 V$. On identifie $\Lambda^2 V$ et $\Lambda^2 \check{V}$ grâce à q. On note K (resp. Q) le sous-fibré (resp. quotient) tautologique de $\mathbb{G}$, on a la suite exacte suivante :

$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}} \xrightarrow{\pi} Q \longrightarrow 0$$

Remarque 0.1. Un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ définit une surface S de degré d qui est l'image de $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^1}(f^*Q)$ dans $\mathbb{P}(V)$. Si on effectue cette construction pour le fibré $\check{K}$ on obtient alors la surface $\check{S}$ duale de S. Nous dirons qu'une surface S est autoduale s'il existe un isomorphisme entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(\check{V})$ qui identifie S et $\check{S}$.

Les surfaces autoduales correspondent aux morphismes $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ dont l'orbite sous $PO(q)$ est la même que celle sous $PSO(q)$. Elles sont en général tracées sur un hyperplan de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ non tangent à $\mathbb{G}$.

1 Injectivité générique de Ψ

1.1 Une stratification de $\mathbf{R}_d$

Soit $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$, le faisceau f^*Q s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ avec $0 \leq a \leq d$.

Définition 1.1. *Un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ est dit de type a (avec $0 \leq a \leq [\frac{d}{2}]$) si f^*Q est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$. Notons $\mathbf{R}_{d,a}$ (resp. $\mathbf{R}'_{d,b}$) l'ensemble des surfaces paramétrées de type a (resp. dont la duale est de type b).*

Nous notons $\mathbf{R}_d$ la variété $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}) \setminus (\mathbf{R}_{d,0} \cup \mathbf{R}'_{d,0})$.

Remarques 1.1. (I) Cette définition est invariante sous $PSO(q)$ et PGL_2. Le type de la duale est déterminé par la décomposition de $\check{K}$.

(II) Une surface de $\mathbf{R}_{d,0}$ (resp. $\mathbf{R}'_{d,0}$) est un cône (resp. la duale d'un cône) de degré d. Pour tout élément $f \in \mathbf{R}_d$, l'application $V \longrightarrow H^0(f^*Q)$ est injective (sinon la duale est de type nul).

Considérons l'ouvert $\mathbf{F}_a$ de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(V, S_a \oplus S_{d-a})$ des applications linéaires injectives telles que la flèche induite $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ sur les faisceaux soit surjective. L'ensemble des orbites de $\mathbf{F}_a$

sous $PGL(V)$ forme un ouvert $\mathbb{G}r_a$ de la grassmannienne $\mathbb{G}(4, S_a \oplus S_{d-a})$. Le groupe G_a agit sur $\mathbf{F}_a$ et sur $\mathbb{G}r_a$. Il existe un morphisme naturel $\Pi_a : \mathbf{F}_a \longrightarrow \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ dont l'image est exactement $\mathbf{R}_{d,a}$.

Remarques 1.2. (I) Les fibres de Π_a sont les orbites sous l'action de G_a (choix de l'identification entre f^*Q et $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$). Il est facile de vérifier que l'action de G_a sur $\mathbf{F}_a$ est libre. La variété $\mathbf{R}_{d,a}$ est donc irréductible de dimension $3d + 2a + 5$ si $a < \frac{d}{2}$ et $4d + 4$ si $a = \frac{d}{2}$. On peut montrer qu'elle est lisse.

(II) Si on a un morphisme u de $\mathbf{R}_d$ (ou même de $\mathbf{R}_{d,a}$) vers un schéma X tel que u est $PGL(V)$-invariant, alors on a un morphisme u_a de $\mathbb{G}r_a$ dans X qui se factorise par u.

Proposition 1.1. *Dans* $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$*, les variétés* $\mathbf{R}_{d,a}$ *(resp.* $\mathbf{R}'_{d,a}$*) sont déterminantielles, de codimension* $d - 2a - 1$ *si* $a < \frac{d}{2}$ *et nulle si* $a = \frac{d}{2}$*. Elles forment une stratification.*

Démonstration. Soit f_u le morphisme universel de $\mathbb{P}^1 \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ dans $\mathbb{G} \times \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ (on note p et q les projections du premier produit et p' et q' celles du second), la variété $\mathbf{R}_{d,a}$ est le lieu où la flèche de fibrés vectoriels :

$$R^1q_*(f_u^*p'^*K \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-[\frac{d}{2}]-1)) \longrightarrow R^1q_*(f_u^*p'^*V \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-[\frac{d}{2}]-1))$$

a un conoyau de dimension $[\frac{d}{2}] - a - 1$. Ceci permet de voir que ces variétés forment une stratification de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$. De la même façon on a une stratification par le type de la duale. On peut également voir les surfaces de type a comme le lieu où la flèche de fibrés vectoriels :

$$R^1q_*(f_u^*p'^*K \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a-2)) \longrightarrow R^1q_*(f_u^*p'^*V \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-a-2))$$

a un conoyau de dimension un. Dans ce cas la variété $\mathbf{R}_{d,a}$ a la codimension attendue comme variété déterminantielle (voir la remarque 1.2 pour la dimension de $\mathbf{R}_{d,a}$). $\square$

Remarque 1.3. On peut montrer (cf. [P2] Proposition 1) que les stratifications par $\mathbf{R}_{d,a}$ et $\mathbf{R}'_{d,b}$ sont indépendantes : l'intersection $\mathbf{R}_{d,a} \cap \mathbf{R}'_{d,b}$ est de codimension $2d - 2(a+b) - 2$.

1.2 Le morphisme vers le lieu singulier

Nous définissons schématiquement le lieu singulier abstrait et nous vérifions que c'est une courbe de $S^2\mathbb{P}^1$ sauf si la surface ou sa duale est un cône.

Soit f un élément de $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$, alors $f^*\pi$ est une surjection de $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans f^*Q. Notons p et q les projections de la variété d'incidence de $\mathbb{P}^1 \times S^2\mathbb{P}^1$ sur le premier et le second facteur. Soit R le conoyau de la composée suivante : $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow V \otimes q_*p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow q_*p^*(f^*Q)$.

Définition 1.2. *Le lieu singulier abstrait de* $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$ *est le* $0^{\text{ième}}$ *idéal de Fitting du faisceau* R *défini ci-dessus. Ensemblistement, il correspond aux paires de génératrices qui se rencontrent ; on le note* $\Psi(f)$.

Lemme 1.1. *Soit* $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G})$*, le schéma* $\Psi(f)$ *est une courbe si et seulement si* f *est dans* $\mathbf{R}_d$*. Cette courbe est de degré* $d-2$*. L'application* Ψ *ainsi définie sur* $\mathbf{R}_d$ *est* $PO(q)$*-invariante et à valeurs dans* $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$*, la variété des courbes de degré* $d-2$ *de* $\mathbb{P}(S_2)$.

Démonstration. Le faisceau R admet la résolution suivante :

$$H^0(f^*Q(-2)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \xrightarrow{A} (H^0(f^*Q)/V) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

Le lieu singulier abstrait a pour équation le déterminant de A. Il est non vide dès que $d \geq 3$ et donc de codimension au plus 1. S'il est de codimension nulle, toutes les génératrices de la surface se rencontrent ce qui n'est possible que si la surface ou sa duale est un cône. C'est donc une courbe de degré $d-2$ sur $\mathbb{P}(S_2)$ pour tout $f \in \mathbf{R}_d$, la matrice A est alors injective.

L'invariance sous $PGL(V)$ est évidente car le lieu singulier abstrait ne dépend que de l'image de V dans $H^0(f^*Q)$. Il suffit de prouver l'invariance par dualité. Dualisons la suite exacte précédente :

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow (H^0(f^*Q)/V)\check{} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow H^0(f^*Q(-2))\check{} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \\ \longrightarrow \mathbf{Ext}^1(R(1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

En tenant compte des isomorphismes donnés par la dualité de Serre entre $(H^0(f^*Q)/V)\check{}$ et $H^0(f^*\check{K}(-2))$ et entre $H^0(f^*Q(-2))\check{}$ et $H^0(f^*\check{K})/\check{V}$, on voit que la flèche définissant le lieu singulier de la duale est la transposée de A, de sorte que son déterminant est le même. Cette application est donc invariante sous l'action de $PO(q)$. □

Proposition 1.2. *L'application* Ψ *se factorise par* $\mathbb{G}r_a$ *au dessus de* $\mathbf{R}_{d,a}$*, le morphisme* Ψ_a *ainsi obtenu est* PGL_2*-linéaire pour le plongement de Plücker de* $\mathbb{G}r_a$ *dans* $\mathbb{P}(\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}))$.

Démonstration. Le morphisme Ψ est invariant sous $PGL(V)$ il se factorise donc par $\mathbb{G}r_a$ au dessus de $\mathbf{R}_{d,a}$ (remarque 1.2). Sur $\mathbb{G}r_a \times \mathbb{P}(S_2)$ le morphisme Ψ_a est donné par le déterminant de l'application suivante (on note $\mathcal{V}$ le sous-fibré tautologique et pr_1 et pr_2 les projections sur le premier et le second facteur) :

$$\begin{aligned} (S_{a-2} \oplus S_{d-a-2}) \otimes {\mathrm{pr}_2}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \\ \longrightarrow ((S_a \oplus S_{d-a})/{\mathrm{pr}_1}^*\mathcal{V}) \otimes {\mathrm{pr}_2}^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(1), \end{aligned}$$

il est donc donné par le produit extérieur d'ordre $d-2$ puis par la projection sur $\mathbb{G}r_a$:

$$\mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a} \longrightarrow (\Lambda^4\mathcal{V})\check{} \otimes S^{d-2}S_2.$$

Le morphisme Ψ_a est donc bien linéaire car $(\Lambda^4\mathcal{V})\check{}$ est de degré 1 pour le plongement de Plücker. □

1.3 Le morphisme Φ

Nous construisons un second PGL_2-morphisme Φ de $\mathbf{R}_d$ dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ qui est encore invariant sous $PO(q)$. On a les inclusions naturelles suivantes :

$$\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{G}) \subset \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2 V)) \subset \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)).$$

Nous définissons Φ sur un ouvert de l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$. Notons $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ l'ensemble des formes quadratiques sur S_d. Nous définissons l'application rationnelle PGL_2-invariante suivante :

$$\Phi : \mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d) \longrightarrow \mathbb{P}(S^2 S_d).$$
$$\psi \mapsto \psi q {}^t\psi$$

L'application Φ est définie en dehors du fermé de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$ des ψ tels que l'image de ${}^t\psi$ est contenue dans un sous-espace totalement isotrope de $\Lambda^2 V$. Elle est donc définie sur $\mathbf{R}_d$ tout entier.

Remarques 1.4. (I) Soit $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2 V))$. En tant que quadrique, la forme quadratique $\Phi(f)$ contient la courbe rationnelle normale C_d si et seulement si on a $f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{G}$.

(II) L'image de $\mathbf{R}_d$ par Φ est donc contenue dans l'ensemble des quadriques de $\mathbb{P}(S_d)$ contenant la courbe rationnelle normale C_d, c'est-à-dire l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_{C_d}(2))$. Mais l'espace vectoriel $H^0\mathcal{I}_{C_d}(2)$ est le noyau de $H^0\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_d)}(2) \longrightarrow H^0\mathcal{O}_{C_d}(2)$ et s'identifie à $S^2 S_{d-2}$. La loi de réciprocité de Hermite (voir [SP]) permet d'identifier $S^2 S_{d-2}$ à $S^{d-2}S_2$. Ainsi, le morphisme Φ défini sur $\mathbf{R}_d$ est à valeurs dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$, l'espace des courbes de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$.

Notons $\mathbf{Q}_k$ le localement fermé de $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ des formes quadratiques de rang exactement k. Le fermé des formes quadratiques qui contiennent la courbe rationnelle normale C_d est une sous-variété linéaire de $\mathbb{P}(S^2 S_d)$ isomorphe à $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$ (voir remarque 1.4), notons $\mathbf{q}_k$ la trace de ce sous-espace linéaire dans $\mathbf{Q}_k$.

Lemme 1.2. *L'application Φ est $PO(q)$-invariante et se factorise par $\mathbb{G}r_a$ en un morphisme linéaire pour le plongement de Plücker.*

Démonstration. L'application Φ est évidemment $PO(q)$-invariante. Si $\mathcal{V}$ est le sous-fibré tautologique et ψ_u le morphisme universel de $\Lambda^2\mathcal{V}$ dans $S_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a}$, le morphisme Φ est défini de la façon suivante :

$$\Lambda^4\mathcal{V} \xrightarrow{q} S^2(\Lambda^2\mathcal{V}) \xrightarrow{s^2\psi_u} S^2 S_d \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}r_a}$$

qui est bien linéaire pour le plongement de Plücker car $\Lambda^4\mathcal{V}$ est de degré -1. $\square$

Proposition 1.3. *Pour* $d \geq 5$ *l'image de* Φ *est* $\overline{\mathbf{Q}}_6$*. La fibre générale de* Φ *est une orbite sous* $PO(q)$*. Pour* $d \geq 5$ *les fibres de* Φ *au dessus de* $\overline{\mathbf{Q}}_6$ *sont*

- *de dimension 15 isomorphes à* $PO(q)$ *au dessus de* $\mathbf{Q}_6$*. L'action est libre sur* $\mathbf{R}_d^6$*,*
- *de dimension 15 isomorphes à* $PSO(q)$ *au dessus de* $\mathbf{Q}_5$*. Le stabilisateur est fini d'ordre 2 sur* $\mathbf{R}_d^5$*,*
- *fomées de deux composantes irréductibles de dimension* $d + 11$ *qui se coupent sur la seule orbite fermée de la fibre qui est en dimension 14 au dessus de* $\mathbf{Q}_4$*,*
- *irréductibles de dimension* $d + 11$ *contenant une unique orbite fermée qui est en dimension* 12 *au dessus de* $\mathbf{Q}_3$*.*

Démonstration. Si $d < 5$, le morphisme Φ est surjectif et la fibre générale est une orbite sous $PO(q)$. Si G est un sous-groupe d'un groupe linéaire, on note PG le quotient du groupe G par les homothéties.

Soit w une forme quadratique de S_d. Si $\psi \in \Phi^{-1}(w)$, alors $\mathrm{Ker}{}^t\psi$ est inclus dans $\mathrm{Ker} w$. Notons $I(\psi) = {}^t\psi(\mathrm{Ker} w)$ qui est un sous-espace vectoriel isotrope de $\Lambda^2 V$ et $N(w)$ l'espace $S_d/\mathrm{Ker}(w)$ qui est muni d'une forme quadratique non dégénérée induite par w. La suite exacte :

$$0 \longrightarrow I(\psi) \longrightarrow \mathrm{Im}{}^t\psi \longrightarrow N(w) \longrightarrow 0$$

impose que $I(\psi)$ est exactement le noyau de la restriction de q à $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Ainsi, $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ est nécessairement contenu dans $I(\psi)^\perp$. Les rangs $r(w)$ et $r(\psi)$ de w et ψ et la dimension $i(\psi)$ de $I(\psi)$ vérifient les deux conditions suivantes :

$$r(\psi) = r(w) + i(\psi) \;\text{ et }\; r(\psi) \leq 6 - i(\psi)$$

Une fois fixés les entiers $r(\psi)$ et $i(\psi)$ vérifiant ces conditions, la fibre au dessus de w est donnée par les choix suivants : un sous-espace vectoriel $\mathrm{Ker}{}^t\psi$ de $\mathrm{Ker} w$ de codimension $i(\psi)$; un sous-espace $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ de dimension $r(\psi)$ de $\Lambda^2 V\check{}$ tel que la restriction de la forme quadratique q a pour noyau $I(\psi)$ un espace de dimension $i(\psi)$; une isométrie à homothétie près de $S_d/\mathrm{Ker}({}^t\psi)$ dans $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Le groupe $PO(q)$ agit transitivement sur les couples formés d'objets des deux derniers types.

Les valeurs du triplet $(r(w), r(\psi), i(\psi))$ possibles sont alors (on se contente des cas $r(w) \geq 3$) : $(6,6,0)$, $(5,5,0)$, $(4,5,1)$, $(4,4,0)$, $(3,4,1)$ et $(3,3,0)$.

Si $i(\psi)$ est nul, la fibre est donnée par un sous-espace $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ de $\Lambda^2 V\check{}$ de dimension $r(w)$ tel que la restriction de la forme quadratique q est non dégénérée et une isométrie de $S_d/\mathrm{Ker}(w)$ dans $\mathrm{Im}({}^t\psi)$. Le théorème de Witt nous permet de dire que tous les sous-espaces $\mathrm{Im}({}^t\psi)$ sont conjugués sous $PO(q)$, la fibre est ainsi une orbite sous ce groupe. Elle est toujours fermée. Le stabilisateur est alors $PO(\mathrm{Im}({}^t\psi)^\perp)$. Ceci décrit les cas de rang 5 et 6 et les fermés de dimensions 14 et 12 des cas de rang 4 et 3. Si $r(w) \leq 5$, l'action de $PSO(q)$ est identique à celle de $PO(q)$ et les surfaces sont autoduales.

Si $i(\psi)$ vaut 1, la fibre est alors donnée par le choix d'un hyperplan de $\mathrm{Ker}w$ (c'est $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}w)$ qui est de dimension $d-4$ ou $d-3$), le choix d'un sous-espace W de dimension 5 ou 4 de $\Lambda^2 V\check{}$ tel que la restriction de la forme quadratique q à W a un noyau de dimension 1 (ce choix correspond à $PO(q)/\mathrm{Stab}(W)$ qui est de dimension 4 ou 7) et le choix d'une isométrie de $N(w)$ sur W à homothétie près (c'est $PO(W)$ qui est isomorphe à $\mathbb{C}^4 \rtimes (PO(4) \times \mathbb{C}^*)$ ou $\mathbb{C}^3 \rtimes (PO(3) \times \mathbb{C}^*)$ et est de dimension 11 ou 7). On peut remarquer qu'une fois le choix de l'élément de $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}w)$ réalisé, la fibre est une orbite sous $PO(q)$: pour $r(w) = 4$, la fibre est isomorphe à une fibration en $PO(q)$ au dessus de $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}w)$ et a deux composantes connexes de dimension $d + 11$; pour $r(w) = 3$, fibre est isomorphe à une fibration en $PSO(q)/PSO_2$ au dessus de $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}w)$ et elle est irréductible de dimension $d + 11$.

Il reste à vérifier que les parties correspondant à $i(\psi)$ nul sont adhérentes à celles où $i(\psi) = 1$. Pour le voir, on choisit w de rang 4 ou 3 et $\psi \in \Phi^{-1}(w)$ tel que $i(\psi) = 0$ et on construit une déformation ψ_t d'élément tels que $i(\psi_t)$ est non nul qui tend vers ψ quand t tend vers 0. L'application ψ est donnée par une injection $\psi : N(w) \longrightarrow \Lambda^2 V$. Soit K un hyperplan de $\mathrm{Ker}(w)$ et $N = S_d/K$. Soit I le noyau de dimension 1 de $N \longrightarrow N(w)$, x un générateur de I et y un élément isotrope de $(\psi(N(w)))^\perp$, on définit l'application ψ_t sur $N = I \oplus N(w)$ par $\psi_t|_{N(w)} = \psi$ et $\psi_t(x) = ty$. Elle convient. □

Le morphisme Φ est défini sur un ouvert de $\overline{\mathbf{R}_d}$ que nous noterons $\overline{\mathbf{R}_d}^{ss}$ (il correpond aux points semi-stables pour l'action de $PO(q)$ cf. Proposition 2.2).

Proposition 1.4. *(ı) L'image de $\mathbf{R}_d$ est dense dans $\overline{\mathbf{q}}_6$. La fibre générale de $\Phi|_{\mathbf{R}_d}$ est la même que celle de Φ sur tout l'espace $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$.*

(ıı) L'image de $\overline{\mathbf{R}_d}^{ss}$ est $\overline{\mathbf{q}}_6$ et les fibres de $\Phi|_{\overline{\mathbf{R}_d}^{ss}}$ au dessus de $\overline{\mathbf{q}}_6$ sont les mêmes que celles de Φ sur tout l'espace $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d)$.

Démonstration. (ı) Soit $\psi \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ tel que $\Phi(\psi) \in \overline{\mathbf{q}}_6$. Un tel élément est dans $\mathbf{R}_d$ si et seulement si le noyau de ${}^t\psi$ ne rencontre pas la courbe rationnelle normale C_d. Ainsi l'image de $\mathbf{R}_d$ contient toutes les formes quadratiques w dont le noyau ne rencontre pas C_d. Dans ce cas la fibre au dessus de w est totalement contenue dans $\mathbf{R}_d$.

Supposons que le noyau de w rencontre C_d en a points. On note alors N_a l'espace vectoriel engendré par ces points. L'image de C_d par la projection de centre N_a est la courbe rationnelle normale C_{d-a} de degré $d-a$ de $\mathbb{P}(S_d/N_a) \simeq \mathbb{P}(S_{d-a})$ et induit une forme quadratique w' sur S_{d-a} dont le noyau ne rencontre pas C_{d-a}. La forme quadratique ainsi obtenue est donc dans l'image de $\mathbf{R}_{d-a}$ par Φ.

Le fermé des formes quadratiques dont le noyau rencontre C_d en a points est donc de dimension au plus $a+4(d-a)-11 < 4d-11$ qui est la dimension minimale des composantes irréductibles de $\overline{\mathbf{q}}_6$ (variété déterminantielle). Ce fermé ne contient donc aucune composante irréductible de $\overline{\mathbf{q}}_6$.

L'image de $\mathbf{R}_d$ contient ainsi un ouvert partout dense dans $\overline{\mathbf{q}}_6$. On peut montrer de la même façon qu'il contient aussi un ouvert partout dense dans $\overline{\mathbf{q}}_k$ pour $3 \leq k \leq 5$.

(II) Par ailleurs, l'image de $\mathbf{R}_d$ contient l'image de $\mathbf{q}_3$ et $\mathbf{q}_4$ tout entiers : si le noyau de la forme quadratique w rencontre C_d, on peut alors choisir un élément $\psi \in \mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ tel que son noyau ne rencontre pas C_d (en prenant $i(\psi) = 1$, cf. proposition précédente). L'intersection de la fibre avec $\mathbf{R}_d$ est alors décrite par deux ouverts partout denses du complémentaire de l'orbite fermée de la fibre.

Si w est une forme quadratique de rang 5 ou 6 dont le noyau rencontre C_d, alors elle n'est pas dans l'image de $\mathbf{R}_d$. La fibre est cependant évidement entièrement contenue dans $\overline{\mathbf{R}_d}^{ss}$. □

1.4 Comparaison des deux morphismes

Nous montrons dans ce paragraphe le théorème suivant :

Théorème 1.1. *Les morphismes Ψ et Φ sont égaux.*

Démonstration. Nous étudions les applications linéaires Φ_a et Ψ_a de $\mathbb{G}r_a$ dans $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$. Elles se prolongent sur le plongement de Plücker en deux applications PGL_2-linéaires que nous notons encore Φ_a et Ψ_a de $\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ dans $S^{d-2}S_2$.

D'abord nous montrons que ces morphismes coïncident sur la strate des surfaces de type 1. En effet, ils se factorisent par $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$ (Lemme 1.3).

Ensuite, si Ψ et Φ coïncident sur cette strate alors ils sont égaux. En effet, par dualité, les morphismes Φ et Ψ sont égaux sur les surfaces dont la duale est de type 1. Par linéarité il suffit de montrer que la strate des surfaces dont la duale est de type 1 engendre tout l'espace vectoriel (Proposition 1.5).

Lemme 1.3. *Les morphismes Ψ_1 et Φ_1 sont égaux, ils correspondent à la projection canonique de $\Lambda^4(S_1 \oplus S_{d-1})$ vers $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$.*

Démonstration. On commence par étudier Ψ_a. Considérons le morphisme :

$$(S_{a-2} \oplus S_{d-a-2}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \xrightarrow{m} (S_a \oplus S_{d-a}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(2)$$

produit des deux multiplications. Le morphisme Ψ est donné par $H^0(\Lambda^{d-2}m)$. Il est donc défini par le produit tensoriel des deux applications PGL_2-linéaires $\Lambda^{a-1}S_{a-2} \longrightarrow \Lambda^{a-1}S_a \otimes S^{a-1}S_2$ et $\Lambda^{d-a-1}S_{d-a-2} \longrightarrow \Lambda^{d-a-1}S_{d-a} \otimes S^{d-a-1}S_2$ On peut donc écrire Ψ_a comme l'application linéaire suivante (en tenant compte des isomorphismes entre $\Lambda^{k+1}S_n$ et $\Lambda^{n-k}\check{S}_n$) :

$$\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}) \longrightarrow \Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a} \longrightarrow S^{d-2}S_2.$$

Étudions maintenant Φ_a : si on a une application φ de V vers $S_a \oplus S_{d-a}$ alors la flèche de $\Lambda^2 V$ vers S_d est donnée par l'application $\pi\ : \Lambda^2(S_a \oplus S_{d-a}) \longrightarrow S_a \otimes S_{d-a} \longrightarrow S_d$ composée avec $\Lambda^2\varphi$. Ainsi, le morphisme Φ_a est donné par (α est le produit exterieur)

$$\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a}) \xrightarrow{{}^t\alpha} S^2(\Lambda^2(S_a \oplus S_{d-a})) \longrightarrow S^2(S_a \otimes S_{d-a}) \longrightarrow S^2 S_d.$$

Mais le morphisme $S^2(S_a \otimes S_{d-a}) \longrightarrow \Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ se factorise par $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$:

$$\Big(\sum_i (x_i \otimes y_i)\Big).\Big(\sum_j (x'_j \otimes y'_j)\Big) \mapsto -\sum_{i,j}(x_i \wedge x'_j, 0) \wedge (0, y_i \wedge y'_j).$$

Cette flèche de $\Lambda^4(S_a \oplus S_{d-a})$ dans $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$ est la même que la première partie de Ψ_a. Il nous suffit de vérifier que les deux applications PGL_2-linéaires de $\Lambda^2 S_a \otimes \Lambda^2 S_{d-a}$ dans $S^{d-2}S_2$ sont les mêmes.

Mais dans le cas $a = 1$, le terme $\Lambda^2 S_{d-1} \otimes \Lambda^2 S_1$ est isomorphe à $S^{d-2}S_2$ et à $S^2 S_{d-2}$. Ainsi dans ce cas les deux morphismes correspondent au quotient $\Lambda^4(S_1 \oplus S_{d-1}) \longrightarrow \Lambda^2 S_1 \otimes \Lambda^2 S_{d-1}$ et après identification de $S^{d-2}S_2$ et $S^2 S_{d-2}$ à $\Lambda^2 S_{d-1}$ on a l'égalité entre Ψ_1 et Φ_1. □

Les morphismes Ψ et Φ étant invariants par dualité, ils coïncident sur le fermé de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ des surfaces de type général dont la duale est de type 1. Comme $\Psi_{[\frac{d}{2}]}$ et $\Phi_{[\frac{d}{2}]}$ sont linéaires pour le plongement de Plücker de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$, il suffit de montrer la proposition suivante :

Proposition 1.5. *Les surfaces de type général dont la duale est de type* 1 *ne sont pas sur un hyperplan du plongement de Plücker de* $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ *et forment un schéma réduit.*

Démonstration. On sais que cette sous-variété est déterminantielle (Proposition 1.1). On peut donc calculer la résolution de son idéal grâce au complexe d'Eagon-Northcott associé. En effet, la variété est donnée par la non surjectivité de la flèche suivante sur $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ (on note $\mathcal{V}$ le sous-fibré tautologique de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$) :

$$\mathcal{V} \otimes S_{d-3} \longrightarrow (S_{[\frac{d}{2}]+d-3} \oplus S_{2d-[\frac{d}{2}]-3}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}}.$$

Notons L (resp. M) le faisceau de gauche (resp. droite) et l (resp. m) son rang. La résolution de son idéal $\mathcal{I}$ est donnée par (voir par exemple [GP]) :

$$0 \longrightarrow \Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^l L \otimes S^{l-m}(\check{M}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^m L \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0.$$

Il reste à calculer les sections globales de $\mathcal{I}(1)$ donc la cohomologie des termes de ce complexe. Pour voir que le groupe $H^0\mathcal{I}(1)$ est nul il suffit de montrer que les groupes de cohomologie $H^{l-m-p}(\Lambda^m \check{M} \otimes \Lambda^{l-p} L \otimes S^{l-m-p}(\check{M})(1))$ sont nuls. Or seul le terme L est non trivial, il suffit donc de montrer que les groupes $H^{l-m-p}(\Lambda^{l-p} L(1))$ sont nuls. On calcule ce faisceau grâce aux foncteurs de Schur :

$$\Lambda^{l-p} L = \bigoplus_{\lambda} (S_\lambda \mathcal{V} \otimes S_{\lambda'} S_{d-3}),$$

il reste donc à calculer la cohomologie de $S_\lambda \mathcal{V}$ pour les partitions qui apparaissent et on trouve le résultat d'annulation (la cohomologie des foncteurs de Schur des fibrés tautologiques est connue, voir [DE]). Ici les $S_\lambda \mathcal{V}$ sont à cohomologie complètement nulle.

Il reste à éliminer le cas où les courbes de type 1 seraient sur un hyperplan épaissi. Ce n'est pas le cas : l'ensemble des surfaces de $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ dont la duale est de type 1 est l'image de l'incidence entre $\mathbb{G}r_1$ et $\mathbb{G}r_{[\frac{d}{2}]}$ donnée par la dualité. Cette image est donc réduite. $\square$

Théorème 1.2. *Le morphisme Ψ est génériquement injectif modulo isomorphisme et dualité.*

Démonstration. Il suffit de combiner le Théorème 1.1 et les propositions 1.3 et 1.4. $\square$

2 Compléments et applications

2.1 Propriétés générales de $\Psi(\mathbf{R}_d)$

Notons $\mathbf{R}_d^k$ la trace dans $\mathbf{R}_d$ de l'image réciproque de $\mathbf{q}_k$ par Φ. Les $\mathbf{R}_d^k$ pour $k \in [3,6]$ forment une stratification de $\mathbf{R}_d$ (les variétés $\mathbf{R}_d^k$ pour $k \leq 2$ sont vides).

Remarques 2.1. (i) La variété $\mathbf{R}_d^6$ est un ouvert de $\mathbf{R}_d$.

(ii) La variété $\mathbf{R}_d^5$ est le localement fermé des morphismes dont la courbe image est tracée dans un hyperplan H de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ non tangent à $\mathbb{G}$ (l'intersection $H \cap \mathbb{G}$ est isomorphe à Q_3, la quadrique lisse de dimension 3).

(iii) La variété $\mathbf{R}_d^4$ est le localement fermé des morphismes dont la courbe image est tracée :

– dans un hyperplan H de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ tangent à $\mathbb{G}$ (l'intersection $H \cap \mathbb{G}$ est alors isomorphe au cône $\mathfrak{C}$ de dimension 3 au dessus d'une quadrique lisse de dimension 2) c'est le cas général ;
– ou dans un sous-espace linéaire W de dimension 3 non tangent à $\mathbb{G}$ (l'intersection $W \cap \mathbb{G}$ est alors isomorphe à une quadrique lisse de dimension 2). Cette famille de surface est adhérente à la précédente (Proposition 1.3).

(iv) La variété $\mathbf{R}_d^3$ est le localement fermé des morphismes dont la courbe image est tracée dans un sous-espace linéaire de dimension 3 de $\mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ tangent à $\mathbb{G}$ (l'intersection $W \cap \mathbb{G}$ est isomorphe à un cône $\mathfrak{C}'$ de dimension 2 au dessus d'une conique lisse).

Théorème 2.1. *Les variétés $\mathbf{R}_d$ et $\mathbf{R}_d^5$ sont irréductibles et lisses de dimension $4d+4$ et $3d+8$. La variété $\mathbf{R}_d^4$ (resp. $\mathbf{R}_d^3$) a $d-1$ (resp. $[\frac{d}{2}]$) composantes irréductibles de dimension $3d+7$ (resp. $2d+9$).*

Démonstration. Nous utilisons les résultats d'une étude plus générale du schéma de Hilbert des courbes rationnelles sur les variétés homogènes [P1].

La variété $\mathbf{R}_d$ est un ouvert du schéma des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans la grassmannienne $\mathbb{G}$. Les résultats de [P1] nous permettent de conclure à la lissité, l'irréductibilité et la dimension de cette variété.

Nous avons un morphisme propre de la variété $\mathbf{R}_d^5$ vers $\mathbb{P}(\Lambda^2 \check{V})$: à $f \in \mathbf{R}_d^5$ on associe l'hyperplan sur lequel l'image est tracée (il est unique sinon par Φ on aurait une quadrique de rang au plus 4). La fibre de ce morphisme est le schéma $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, Q_3)$ des morphismes de degré d de $\mathbb{P}^1$ dans Q_3 la quadrique non singulière de rang 5 découpée dans $\mathbb{G}$ par l'hyperplan. La fibre est donc irréductible, lisse de dimension constante égale à $3d+3$ (cf. [P1]).

Nous décrivons les composantes irréductibles de $\mathbf{R}_d^4$. La Proposition 1.3 montre qu'un ouvert dense $\mathbf{U}_4$ de $\mathbf{R}_d^4$ est formé des éléments f tels que la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est contenue dans un unique hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ (cas $i(f)=1$). On peut donc se resteindre à $\mathbf{U}_4$.

On a un morphisme propre $\Upsilon_4 : \mathbf{U}_4 \longrightarrow \mathbb{G}$ qui a f associe le point de contact de l'unique hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ contenant $f(\mathbb{P}^1)$. La fibre de Υ_4 au dessus de $L_0 \in \mathbb{G}$ est isomorphe à $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ où $\mathfrak{C}_{L_0}$ est le cône de $\mathbb{G}$ formé par les droites qui rencontrent L_0.

Notons $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ l'éclatement π de $\mathfrak{C}_{L_0}$ au sommet du cône. Nous avons une projection p de $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ vers la quadrique Q_{L_0} isomorphe à $L_0 \times \check{L}_0$. Il est facile de vérifier que $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est la fibration en droites projectives au dessus de Q_{L_0} associée au faisceau $\mathcal{O}_{L_0 \times \check{L}_0}(-1,0) \oplus \mathcal{O}_{L_0 \times \check{L}_0}(0,1)$. Le groupe de Picard de $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est donc $\mathbb{Z}^3$ (nous prendrons pour base des cycles les degrés sur Q_{L_0} et le degré relatif pour p).

Lemme 2.1. *Pour tout* $\gamma = (a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, *le schéma* $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ *est irréductible et lisse de dimension* $2a + 2b + c + 3$.

Démonstration. Le théorème principal de [P1] nous permet de dire que le schéma des morphismes $\mathrm{Mor}_{(a,b)}(\mathbb{P}^1, Q_{L_0})$ est irréductible et lisse de dimension $2(a+b+1)$. Par ailleurs, la Proposition 4 de [P1] nous permet de dire que comme le degré relatif est positif, alors $\mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ est irréductible et lisse de dimension $2(a + b + 1) + c + 1$. □

L'éclatement π définit un morphisme $\pi : \mathrm{Mor}_\gamma(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_{\pi_*\gamma}(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$. De plus si f est un élément de $\mathrm{Mor}_{(a,b,c)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ alors $f(\mathbb{P}^1)$ rencontre le diviseur exceptionnel en $\frac{1}{2}(c - (a + b))$ points, le degré de son image dans $\mathfrak{C}_{L_0}$ est donc $\frac{1}{2}(a + b + c)$. Ainsi $\pi(f)$ est de degré d si et seulement si $c = 2d - (a + b)$.

L'image de $\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ dans $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ est contenu dans l'ensemble des morphismes dont l'image passe $d - (a + b)$ fois par le sommet du cône. Si $d < a + b$ ceci impose que l'image du morphisme est contenu dans le diviseur exceptionnel, il se contracte donc sur le sommet par π. Nous supposerons desormais que $d \geq a + b$. Réciproquement, si on a un morphisme de $\mathbb{P}^1$ dans $\mathfrak{C}_{L_0}$ qui passe $d-(a+b)$ fois par le sommet, sa transformée stricte dans $\widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}$ est dans le schéma $\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$ (ou $\mathrm{Mor}_{(b,a,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0})$) et on retrouve le morphisme de départ par projection par π. Nous avons donc des immersions $\pi : \mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}) \longrightarrow \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$.

Proposition 2.1. *Pour* a *fixé, les variétés* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,b,2d-(a+b))}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$ *avec* $d > a + b$ *sont dans l'adhérence de* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$.

Démonstration. Notons W l'espace vectoriel $H^0\mathcal{O}_{L_0}(1)$, c'est un quotient de rang 2 de V. Notons N_W le noyau de la surjection de V dans W. Si $f(\mathbb{P}^1)$ est dans le cône $\mathfrak{C}_{L_0}$, alors l'image de la flèche $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est de rang 1. De plus le conoyau de cette flèche est de rang 2 aux points de $\mathbb{P}^1$ qui s'envoient sur le sommet du cône et de rang 1 ailleurs.

Considérons donc un morphisme $f \in \Upsilon_4^{-1}(L_0)$ tel que le morphisme $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ ait pour conoyau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_D$ où D est un diviseur de degré x. L'image de $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans f^*Q est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d - (a + x))$ et le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a) \oplus \mathcal{O}_D$ est le conoyau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-(a + x)) \xrightarrow{r_0} W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$.

En considérant les flèches duales (de la surface duale), nous avons un morphisme de $\check{V} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $f^*\check{K}$. La flèche ${}^t r_0$ de $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+x)$ a pour image $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$ et conoyau $\mathcal{O}_D$. Le morphisme $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*\check{K}$ se factorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a+x)$ et a pour conoyau le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-(a+x)) \oplus \mathcal{O}_D$. Ainsi, il suffit de se donner une famille r_λ de flèches de $\check{W} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ dans $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a + x)$ sujective au point générique et égale à ${}^t r_0$ au point spécial pour constuire une famille de morphismes dont l'image ne passe pas par le sommet au point générique et qui vaut f au point spécial. □

Corollaire 2.1. *Les composantes irréductibles de* $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}_{L_0})$ *sont les adhérences des images* $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{L_0}))$ *pour* $0 \leq a \leq d$. *Elles sont toutes de dimension* $3d + 3$.

Notons $\mathbf{R}_d^4(a)$ le fermé de $\mathbf{U}_4$ des morphismes f qui sont dans la composante de $\Upsilon_4^{-1}(\Upsilon_4(f))$ contenant $\pi(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_{\Upsilon_4(f)}))$.

Fin de la preuve : Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ pour $1 \leq a \leq d-1$ sont les composantes irréductibles de $\mathbf{R}_d^4$. Elles sont de dimension $3d + 7$.

Les variétés $\mathbf{R}_d^4(0)$ et $\mathbf{R}_d^4(d)$ ne sont pas dans $\mathbf{R}_d^4$ (mais dans son adhérence) car dans ce cas la courbe est tracée sur un (β)-plan ou un (α)-plan respectivement. Elle n'est donc pas dans $\mathbf{R}_d$. Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ ont pour ouvert dense la famille des $\pi_L(\mathrm{Mor}_{(a,d-a,d)}(\mathbb{P}^1, \widetilde{\mathfrak{C}}_L))$ au dessus de $\mathbb{G}$. Celle-ci est irréductible de dimension $3d + 7$. Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ pour $1 \leq a \leq d-1$ sont toutes distinctes, l'image d'un morphisme général est donné par une courbe tracée sur un hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ qui rencontre un (α)-plan et un (β)-plan (contenus dans cet hyperplan) en a points et en $d-a$ points.

Remarquons que la dualité échange les (α)-plans et les (β)-plans ce qui montre que les composantes $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ sont duales l'une de l'autre. Remarquons enfin que les strates $\mathbf{R}_{d,1}$ et $\mathbf{R}'_{d,1}$ sont $\mathbf{R}_d^4(1)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-1)$.

Le cas de $\mathbf{R}_d^3$ est semblable, on a alors un cône au dessus d'une conique. On a encore un morphisme propre dominant vers $\check{T}_{\mathbb{G}}$ (à une courbe on associe l'unique sous-espace linéaire de dimension 3 tangent à $\mathbb{G}$ la contenant). Les fibres de ce morphisme sont isomorphes à $\mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathfrak{C}')$. Les composantes irréductibles sont alors indexées par la multiplicité de la courbe au sommet du cône. On renvoie à [P2] paragraphe 2.1 pour la preuve détaillée. □

Théorème 2.2. *L'image par* Ψ *de la variété* $\mathbf{R}_d$ *(resp. de* $\mathbf{R}_d^5$*) est un localement fermé irréductible* PGL_2*-invariant de dimension* $4d - 11$ *(resp.* $3d - 7$*) et de degré* $i(d)$ *(resp.* $j(d)$*).*

L'image par Ψ *de la variété* $\mathbf{R}_d^4$ *(resp.* $\mathbf{R}_d^3$*) est de degré* $k(d)$ *(resp.* $p(d)$*). Elle a* $[\frac{d}{2}]$ *composantes irréductibles qui sont des localement fermés (resp. fermés)* PGL_2*-invariants de dimension* $2d - 4$ *(resp.* $d - 2$*).*

Les degrés sont donnés par les formules :

$$i(d) = \prod_{k=0}^{d-6} \frac{\binom{d+1+k}{d-5-k}}{\binom{2k+1}{k}} \quad j(d) = \prod_{k=0}^{d-5} \frac{\binom{d+1+k}{d-4-k}}{\binom{2k+1}{k}}$$

$$k(d) = \prod_{k=0}^{d-4} \frac{\binom{d+1+k}{d-3-k}}{\binom{2k+1}{k}} \quad p(d) = \prod_{k=0}^{d-3} \frac{\binom{d+1+k}{d-2-k}}{\binom{2k+1}{k}}.$$

Démonstration. Les dimensions sont données par le théorème précédent et la Proposition 1.3. Les propositions 1.3 et 1.4. montrent que les variétés $\mathbf{q}_k$ pour $3 \leq k \leq 6$ sont équidimensionnelles de dimensions respectives $(k-2)d - 1 - \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$. Les résultats de J. Harris et L.W. Tu [HT], que l'on peut appliquer aux variétés déterminantielles $\mathbf{q}_k$, nous permettent de calculer les degrés.

Les composantes de $\mathbf{R}_d^4$ sont deux à deux en dualité, elles s'identifient donc par Ψ. Les $[\frac{d}{2}]$ images irréductibles obtenues sont distinctes, de même pour les composantes de $\mathbf{R}_d^3$. On peut décrire explicitement les courbes de $\Psi(\mathbf{R}_d^4)$ et de $\Psi(\mathbf{R}_d^3)$ (voir Proposition 2.6). □

2.2 Étude des actions de $PO(q)$ et PGL_4

Nous étudions dans ce paragraphe l'action des groupes $PO(q)$ et $PGL(V)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$. Nous identifions les points stables et semi-stables pour ces deux actions (qui sont les mêmes car $[PGL(V) : PO(q)] = 2$) et montrons qu'il existe un bon quotient de $\mathbf{R}_d$ par $PGL(V)$. Nous l'appelerons "espace des modules des surfaces" et le noterons $\mathcal{M}(d)$.

Proposition 2.2. *(ı) Un point ψ de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ est instable si et seulement si il existe un vecteur $v \in V$ ou $\check{v} \in \check{V}$ tels que $\mathrm{Im}^t\psi$ est contenu dans $v \wedge V$ ou dans $\mathrm{Ker}(\Lambda^2 V \xrightarrow{\tilde{v}} V)$ où $\tilde{v} = \check{v} \wedge \mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V \wedge \check{v}$.*

(ıı) Un point ψ de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$ est non stable si et seulement si il existe un vecteur $z = v \wedge w \in \Lambda^2 V$ tel que $\mathrm{Im}^t\psi$ est contenu dans $z^\perp$ l'orthogonal de z pour la forme quadratique q.

Démonstration. Considérons une base $(e_i)_{i \in [1,4]}$ de V et un sous-groupe a un paramètre de $SL(V)$ diagonalisé dans cette base de telle sorte qu'il agisse avec un poids α_i sur e_i et que l'on ait $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \alpha_4$ avec $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$.

Nous pouvons alors vérifier qu'un élément $x = \sum_{i<j} a_{i,j} e_i \wedge e_j$ avec $a_{i,j} \in S_d$ est instable pour ce sous-groupe si et seulement si $a_{1,4} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0$ ou $a_{2,3} = a_{2,4} = a_{3,4} = 0$. Ceci est équivalent à dire que x est dans $\mathrm{Ker}(\Lambda^2 V \xrightarrow{\tilde{e_4}} V)$ ou dans $e_1 \wedge V$.

De même, l'élément x est non stable pour ce sous-groupe si et seulement si $a_{3,4} = 0$ ce qui signifie que x est dans l'orthogonal de $e_1 \wedge e_2$ pour la forme quadratique q. □

Remarque 2.2. Un élément $f \in \mathrm{Mor}_d(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}(\Lambda^2 V))$ est instable si et seulement si $f(\mathbb{P}^1)$ est contenu dans un plan isotrope pour q. Il est non stable si et seulement si $f(\mathbb{P}^1)$ est contenu dans un hyperplan tangent à la grassmannienne.

L'ouvert $\mathbf{R}_d$ est formé de points semi-stables, il existe donc un bon quotient, noté $\mathcal{M}(d)$, de la variété $\mathbf{R}_d$ sous $PGL(V)$. C'est "l'espace des modules des surfaces rationnelles réglées paramétrées". Il est de dimension $4d-11$.

Proposition 2.3. *L'espace des modules $\mathcal{M}(d)$ est normal et lisse en codimension $2d-8$.*

Démonstration. L'espace des modules $\mathcal{M}(d)$ est normal comme bon quotient d'une variété lisse (voir [MFK]). De plus sur l'ouvert des points stables, l'action de $PGL(V)$ est libre (les points stables sont $\mathbf{R}_d^6 \cup \mathbf{R}_d^5$ sur lesquels l'action de PGL_4 est libre cf. Proposition 1.3) et fermée ([MFK] Proposition 2.4) donc ([MFK] Proposition 0.9) la variété $\mathcal{M}(d)$ est lisse sur l'image de l'ouvert des points stables. Elle est donc lisse en codimension $2d-8$.□

Proposition 2.4. *Le morphisme Φ est un bon quotient de $\mathbf{R}_d$ sous $PO(q)$. Pour $d \geq 6$ la variété $\Psi(\mathbf{R}_d)$ est normale et lisse en codimension $d-5$.*

Démonstration. Il existe un bon quotient par $PO(q)$ de l'ouvert des points semi-stables de $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))$. Le morphisme Φ est d'image $\overline{\mathbf{Q}_6}$ et est $PO(q)$-invariant (Lemme 1.2 et Proposition 1.3), il se factorise donc par ce quotient. Il existe une unique orbite fermée dans chaque fibre (cf. Proposition 1.3). Le morphisme du bon quotient $\mathbb{P}(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 V, S_d))^{ss}//PO(q)$ dans $\overline{\mathbf{Q}_6}$ est donc ensemblistement bijectif. Comme $\overline{\mathbf{Q}_6}$ est normale (cf. [ACGH]), le théorème principal de Zariski montre que Φ est le bon quotient.

L'image de Φ par $\mathbf{R}_d$ est donc le bon quotient d'une variété lisse d'où la normalité (voir [MFK]). De plus sur l'ouvert $\mathbf{R}_d^6$, l'action est libre (cf. Proposition 1.3) et fermée (car les points sont stables [MFK] Proposition 2.4) donc ([MFK] Proposition 0.9) la variété $\Psi(\mathbf{R}_d)$ est lisse sur l'image de $\mathbf{R}_d^6$. Cette image est un ouvert de $\mathbf{q}_6$, son complémentaire est contenu dans $\overline{\mathbf{q}}_5$ et est donc exactement le lieu singulier. Il est en codimension $d-4$. Si $d<6$, le morphisme Ψ est dominant sur $\mathbb{P}(S^{d-2}S_2)$, son image est donc lisse. □

Proposition 2.5. *Si d est pair, la variété $\Psi(\mathbf{R}_d)$ rationnelle.*

Démonstration. Nous montrons que si d est pair, l'image de Ψ est birationnelle à la variété des formes quadratiques de rang 4 de S_{d-2} qui est rationnelle.

Supposons que d vaut $2n$. Considérons l'ouvert $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$. Si f est un élément de cet ouvert alors f^*K et f^*Q s'identifient à $U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n)$ et $W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n)$ (où U et W sont des espaces vectoriels de dimension 2). La condition de parité est ici indispensable.

Fixons U et W, nous allons montrer que l'image de Ψ est birationnelle au bon quotient de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(W \otimes \check{U}, S_{d-2})$ par $PGL(U) \times PGL(W)$. Cet espace projectif est isomorphe à l'espace $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$. Ses points semi-stable pour l'action de $PGL(U) \times PGL(W)$ sont définis par la surjectivité des morphismes $W \otimes S_{d-2} \longrightarrow U$ et $\check{U} \otimes S_{d-2} \longrightarrow \check{W}$.

Un élément de $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$ définit un faisceau F de rang 4 sur $\mathbb{P}^1$. Le faisceau F est trivial si et seulement si la flèche $W \otimes S_{n-1} \longrightarrow U \otimes S_{n-1}$ est un isomorphisme (ce qui décrit un ouvert plus petit que celui des points semi-stables). Appliquons la construction de la définition 1.2 sur cet ouvert : on construit une courbe X de degré $d-2$ de $\mathbb{P}(S_2)$. En identifiant F à $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$, on constate que l'élément de $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$ ainsi défini a X pour image par Ψ. Ceci définit un morphisme qui a une extension triviale associe la courbe X. Il est évidement invariant sous $PGL(U) \times PGL(W)$ et donne une application rationnelle π du bon quotient de $\mathbb{P}\mathrm{Hom}(U \otimes \check{W}, S_{d-2})$ par $PGL(U) \times PGL(W)$ dans l'image de Ψ.

Réciproquement, la donnée de f dans $\mathbf{R}_{2n,n} \cap \mathbf{R}'_{2n,n}$ définit la classe modulo l'action de $PGL(U) \times PGL(W)$ de l'extension suivante :

$$0 \longrightarrow U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n) \longrightarrow V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n) \longrightarrow 0$$

qui est un élément de $\mathbb{P}\mathrm{Ext}^1(W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(n), U \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-n))$. Le fait que le terme central est trivial impose que la flèche $W \otimes S_{n-1} \longrightarrow U \otimes S_{n-1}$ déduite de l'extension est un isomorphisme. On a donc une extension semi-stable. L'application qui a f associe la classe de cette extension modulo $PGL(U) \times PGL(W)$ est donc à valeur dans le bon quotient. De plus, elle est évidement invariante sous $PGL(V)$ et par dualité (identification entre U et $\check{W}$). Ainsi elle se factorise par l'image de Ψ (au moins sur l'ouvert des points stables). Ceci nous montre que l'application rationnelle π est génériquement bijective. La normalité de $\Psi(\mathbf{R}_d)$ permet de conclure que ces deux variétés sont birationnelles.

Enfin le quotient précédent est birationnel à la variété des formes quadratiques de rang 4 de S_{d-2}. En effet, notons q' la forme quadratique de rang 4 sur $W \otimes \check{U}$ et considérons l'application suivante :

$$\mathrm{Hom}(W \otimes \check{U}, S_{d-2}) \longrightarrow S^2 S_{d-2}$$

$$\psi \mapsto \psi q'^t \psi$$

L'image de ce morphisme est la variété des formes quadratiques de rang au plus 4 et la fibre générale du morphisme induit sur les espaces projectifs est $PGL(U) \times PGL(W)$. Le quotient est donc birationnel à la variété des formes quadratiques de rang 4. $\square$

2.3 Quelques courbes de l'image

Remarquons tout d'abord que le plan $\mathbb{P}(S_2)$ contient une conique canonique C_0 qui est l'image du plongement de Veronese de $\mathbb{P}(S_1)$.

Si X est une courbe de degré n de $\mathbb{P}(S_2)$, on appelle polygone de Poncelet associé à X tout polygone complet dont les côtés sont tangents à C_0 et dont les sommets sont sur X. La courbe X est dite en relation de Poncelet avec C_0 si elle possède au moins un polygone de Poncelet à $n+1$ côtés associé. On note $\mathfrak{P}_n$ l'ensemble de ces courbes.

*Remarque 2.3***.** Soit S une surface et $\Psi(S)$ son lieu singulier abstrait. Ce dernier donne des informations sur la géométrie du lieu singulier de S : les points pinces de la surface sont représentés par les points de $\Psi(S) \cap C_0$. Les polygones de Poncelet à n côtés associés à $\Psi(S)$ correspondent aux points n-uples de S ou de sa duale. Enfin, la surface S est développable si et seulement si $\Psi(S)$ contient la conique C_0.

Proposition 2.6. *L'image réduite de* $\mathbf{R}_d^4$ *a* $[\frac{d}{2}]$ *composantes irréductibles isomorphes aux variétés* $\mathfrak{P}_{a-1} \times \mathfrak{P}_{d-a-1}$ *décrites par les courbes réunions d'une courbe de* $\mathfrak{P}_{a-1}$ *et d'une courbe de* $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ *pour* a *variant de 1 à* $[\frac{d}{2}]$*. Son degré est* $m(a,d)$ *que l'on calculera.*

L'image réduite de $\mathbf{R}_d^3$ *a* $[\frac{d}{2}]$ *composantes irréductibles isomorphes à* $\mathfrak{P}_{a-1} \times \mathbb{P}(S_{d-2a})$ *décrites par les courbes réunion de* $d-2a$ *tangentes à* C_0 *et d'une courbe de* $\mathfrak{P}_{a-1}$ *comptée deux fois. Elle est de degré* $2^{d-2a} l(a-1)$ *(*$l(n)$ *est le* $(n+1)^{ième}$ *nombre de Catalan).*

Démonstration. Nous nous contentons de montrer le cas de $\mathbf{R}_d^4$, le cas de $\mathbf{R}_d^3$ est semblable. Rappelons que $\mathbf{R}_d^4(a)$ a été défini à la preuve du Théorème 2.1.

Lemme 2.2. *L'image par* Ψ *de* $\mathbf{R}_d^4(a)$ *est contenue dans la variété des courbes réunion d'une courbe de* $\mathfrak{P}_{a-1}$ *et d'une courbe de* $\mathfrak{P}_{d-a-1}$.

Démonstration. Il suffit de vérifier ce lemme sur l'ouvert de $\mathbf{R}_d^4$ des courbes tracées sur un hyperplan tangent à $\mathbb{G}$ et ne passant pas par le sommet du cône ainsi découpé (cf Théorème 2.1). Soit f un tel point. Le sommet du cône sur lequel la courbe $f(\mathbb{P}^1)$ est tracée est une droite de $\mathbb{P}(V)$. Notons W le quotient de dimension 2 de V qui la définit et N_W le sous-espace de dimension 2 de V correpondant.

Le quotient $\mathcal{L}$ de la flèche $N_W \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est localement libre de rang 1 si $f(\mathbb{P}^1)$ ne passe pas par le sommet. Par ailleurs, ce faisceau décrit la trace des génératrices sur la droite $\mathbb{P}(W)$. Son degré est donc donné par le degré de $f(\mathbb{P}^1)$ sur le premier facteur de la quadrique $Q_{\mathbb{P}(W)}$ qui s'identifie à $\mathbb{P}(W) \times \mathbb{P}(\check{N}_W)$. Ainsi $\mathcal{L}$ est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(a)$. Nous avons donc un quotient naturel S_a de $H^0(f^*Q)$ (dont le noyau est S_{d-a}) tel que l'application linéaire $V \longrightarrow H^0(f^*Q) \longrightarrow S_a$ se factorise par W.

On note K_a le fibré de Schwarzenberger conoyau de l'injection suivante :

$$S_{a-2} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \longrightarrow S_a \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$$

Soient N le noyau et Q le conoyau de la flèche de $V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_a déduite de la composée précédente, le faisceau R de support le lieu singulier abstrait est donné par la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K_{d-a} \longrightarrow R \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

Mais l'image de $V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ dans K_a est $W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ donc Q est donné par :

$$0 \longrightarrow W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_a \longrightarrow Q \longrightarrow 0$$

et $N = N_W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$. Ainsi Q a pour support une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$. Enfin, le noyau de l'application de R dans Q est donné par le conoyau de la flèche $N_W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_{d-a}$ ce qui nous dit que son support est une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$.

Si l'élément f de $\mathbf{R}_d^4(a)$ est tel $f(\mathbb{P}^1)$ passe par le sommet du cône, alors le conoyau de la flèche $N_a\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ est un faisceau ayant de la torsion et la courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ se décompose en une courbe de $\mathfrak{P}_{d'-a-1}$ et les $d-d'$ droites tangentes à la conique déterminées par les points de torsion de ce faisceau. □

Lemme 2.3. *La variété $\mathfrak{P}_n$ est un fermé irréductible et réduit de dimension $2n$ et de degré $l(n)$ de $\mathbb{P}(S^nS_2)$.*

Démonstration. Les courbes de degré n en relation de Poncelet avec la conique canonique sont données par les pinceaux de sections de H^0K_{n+1}. Elles s'identifient ainsi à $\mathrm{Grass}(2, S_{n+1})$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^2 S_{n+1}) = \mathbb{P}(S^nS_2)$ et forment donc une variété irréductible et réduite de dimension $2n$ et de degré :

$$l(n) = \frac{\binom{2n+1}{n+1}}{2n+1} = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}. \qquad \square$$

Fin de la preuve : Les variétés $\mathbf{R}_d^4(a)$ et $\mathbf{R}_d^4(d-a)$ étant irréductibles réduites et échangées par dualité, elles ont la même image par Ψ qui est irréductible et réduite. De plus, cette image est de dimension $2d-4$. On a vu au Lemme 2.2 que cette image est contenue dans $\mathfrak{P}_{a-1} \times \mathfrak{P}_{d-a-1}$. Le lemme précédent nous permet de conclure à l'égalité.

On peut calculer le degré $m(a,d)$ de l'image de $\mathbf{R}_d^4(a)$: il suffit de calculer le nombre de courbes réunion d'une courbe de $\mathfrak{P}_{a-1}$ et d'une courbe de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$ passant par $2d-4$ points. On choisit $2a-2$ points ($\binom{2d-4}{2a-2}$ choix) et par ces points il passe $l(a-1)$ courbes de $\mathfrak{P}_{a-1}$, par les $2d-2a-2$ points restant il passe $l(d-a-1)$ courbes de $\mathfrak{P}_{d-a-1}$. Le degré est donc $m(a,d) = \binom{2d-4}{2a-2}l(a-1)l(d-a-1)$ sauf dans le cas particulier où $a = \frac{d}{2}$ car on a compté deux fois chaque situation et $m(\frac{d}{2}, d) = \frac{1}{2}\binom{2d-4}{d-2}l(\frac{d}{2}-1)^2$. □

Remarque 2.4. Une surface générale a pour lieu singulier abstrait une courbe non singulière. En effet, la variété $\mathfrak{P}_{d-2}$ contient des courbes lisses.

Nous pouvons alors décrire la géométrie de la surface de $\mathbb{P}^3$ correspondante.

Proposition 2.7. *Soit S une surface de $\mathbf{R}_d^4(a)$. Le lieu singulier de S est réunion d'une droite a-uple et d'une courbe de degré $\frac{1}{2}(d-a-1)(d+a-2)$ et celui de $\check{S}$ est réunion d'une droite $(d-a)$-uple et d'une courbe de degré $\frac{1}{2}(a-1)(2d-a-2)$*

Démonstration. Soit S une surface définie par un élément de $\mathbf{R}_d^4(a)$. Avec les notations de la proposition précédente, la droite $\mathbb{P}(\check{N}_W)$ est multiple pour la duale. La multiplicité de cette droite est, pour un sous-espace vectoriel $\mathbb{C}$ de dimension 1 de N_W donné le nombre de points de $\mathbb{P}^1$ tels que la flèche induite $\mathbb{C}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1} \longrightarrow f^*Q$ soit nulle. Si f est dans $\mathbf{R}_d^4(a)$, cette flèche se factorise par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d-a)$ (car $N_W\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}$ se factorise par ce faisceau). On a donc $d-a$ tels points. Ainsi la duale a une droite $(d-a)$-uple.

De plus la duale $\check{S}$ d'une surface S de $\mathbf{R}_d^4(a)$ est dans $\mathbf{R}_d^4(d-a)$. Nous savons donc que $(\check{S})\check{}$ a une droite a-uple. Ainsi S a une droite a-uple. Pour calculer le degré de la courbe résiduelle, il suffit d'utiliser les résultats de [KL]. □

Le morphisme Ψ se factorise par $\mathcal{M}(d)$. Il définit un morphisme de degré 2, toujours noté Ψ de $\mathcal{M}(d)$ vers $\Psi(\mathbf{R}_d)$. Si on note $\mathcal{M}^s(5)$ l'image dans $\mathcal{M}(5)$ de l'ouvert des points stables, $\Psi(\mathcal{M}^s(5))$ s'identifie à un ouvert $\mathcal{U}$ partout dense de $\mathbf{q}_6 \cup \mathbf{q}_5$.

Proposition 2.8. *La fibre de l'application $\mathcal{M}^s(5) \xrightarrow{\Psi} \mathcal{U}$ au dessus d'une cubique est donnée par les triangles de Poncelet associés à la cubique.*

Démonstration. Les surfaces de $\mathcal{M}^s(5)$ sont de type 2 : les surfaces de type 1 ou dont la duale est de type 1 sont toutes dans $\mathbf{R}_5^4$. Soit $\psi \in \mathcal{M}^s(5)$. Le faisceau R définissant le lieu singulier abstrait de ψ est alors le conoyau du morphisme $V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)} \longrightarrow K_2 \oplus K_3$. Ce dernier est injectif car ψ n'est pas instable. De plus, le morphisme canonique (invariant sous le groupe G_2, cf. notations) de V dans H^0K_2 est nécessairement surjectif (car ψ n'est pas dans $\mathbf{R}_5^4$). Ainsi on a la suite exacte :

$$0 \longrightarrow N \longrightarrow K_3 \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad (*)$$

où le faisceau N est $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ (le faisceau $V\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ est une extension non triviale de K_2 par N). Ceci définit une section de K_3 (c'est l'intersection $V \cap H^0K_3$ dans $K_2 \oplus K_3$) qui permet d'écrire la suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1) \xrightarrow{C} \mathcal{I}_Z(2) \longrightarrow R \longrightarrow 0 \quad (**)$$

où Z est la réunion des sommets d'un triangle dont les côtés sont tangents à C_0 et C est l'équation de la cubique support de R.

Ainsi, à toute surface S de $\mathcal{M}^s(5)$ on associe la cubique $\Psi(S)$ et le triangle de Poncelet associé à $\Psi(S)$ défini par la section $V \cap H^0K_3$ de K_3 (qui est invariante sous l'action de G_2).

Réciproquement, si on a une cubique C et un triangle de Poncelet associé de sommets Z, alors la suite exacte $(**)$ permet de retrouver le faisceau R. Pour retrouver le sous-espace vectoriel V de $H^0(K_2 \oplus K_3)$, il suffit de définir un morphisme de $K_2 \oplus K_3$ dans R (V sera le noyau sur les sections). De tels morphismes prolongeant celui de K_3 dans R défini par C et Z (suite exacte $(*)$) sont paramétrés par $\mathrm{Hom}(K_2, R)$. Cet espace vectoriel est une extension de $\mathrm{Ext}^1(K_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}(-1)) = S_0$ par $\mathrm{Hom}(K_2, K_3) = S_1$. Le sous-groupe unipotent de G_2 est isomorphe à S_1 et agit transitivement sur $\mathrm{Hom}(K_2, K_3)$. Le quotient G_2/S_1 qui est alors isomorphe à $\mathbb{C}^*$ agit par homothéties sur $\mathrm{Ext}^1(K_2, N)$. Ainsi le groupe G_2 a deux orbites dans $\mathrm{Hom}(K_2, R)$ dont l'une est le vecteur nul. Comme $V \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_2)}$ est une extension non triviale de K_2 par N, cette orbite ne peut convenir. L'autre orbite sous G_2 définit un élément de la fibre de C. □

Corollaire 2.2. *Il existe exactement deux triangles de Poncelet associés à une cubique générale de* $\mathbb{P}(S_2)$*. Il existe une hypersurface de degré* 6 *de* $\mathbb{P}(S^3S_2)$ *telle que la cubique générale a un unique triangle de Poncelet associé. Il existe trois fermés irréductibles de codimension* 3 *et de degrés* 5, 30 *et* 12 *de* $\mathbb{P}(S^3S_2)$ *tels que la cubique générale a une infinité de triangles associés.*

Démonstration. La proposition précédente permet de résoudre les deux premiers cas. De plus l'image de $\mathbf{R}_5^4$ est formée de deux composantes : $\mathfrak{P}_3$ et les courbes réunion d'un élément de $\mathfrak{P}_2$ et d'une droite. Ces deux types de courbes ont une infinité de triangles associés et forment deux fermés de codimension 3 de degrés 5 et 30. Enfin l'image du bord de $\mathbf{R}_5$ est formé des courbes réunion d'une conique et d'une droite tangente à C_0. Il y a une infinité de triangles associés à ces courbes. Cette variété est de codimension 3 et de degré 12 (voir [P2]). □

References

[ACGH] Enrico Arbarello, Maurizio Cornalba, Phillip A. Griffiths et Joe Harris, Geometry of algebraic curves I. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften **267** (1985), Springer Verlag, New-York, Berlin

[DE] Michel Demazure, A very simple proof of Bott's Theorem. Inventiones mathematicae **33** (1976)

[GP] Laurent Gruson et Christian Peskine, Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes. Enumerative Geometry and Classical Algebraic Geometry. PM **24** (1982), Birkhäuser : Boston, Basel, Stuttgart

[HT] Joe Harris et Loring W. Tu, On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties. Topology **23** (1984)

[KL] Steven L. Kleiman, The enumerative theory of singularities. Nordic Summer School/ NAVF Symposium in mathemetics Oslo (1976)

[MFK] David Mumford, John Fogarty et Frances Kirwan, Geometric invariant theory, Third edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (2), **34** (1994), Springer-Verlag, Berlin

[P1] Nicolas Perrin, Courbes rationnelles sur les variétés homogènes. À paraître aux Annales de l'Institut Fourier, t. 52, fasc. 1 (2002)

[P2] Nicolas Perrin, Lieu singulier des surfaces rationnelles réglées. Preprint disponible sur math.AG/0101083 (2001)

[SP] Tonny A. Springer, Invariant theory. Lecture Notes in Mathematics, Vol. **585** (1977), Springer-Verlag, Berlin-New York