J. London Math. Soc. (2) 72 (2005) 545–570 © 2005 London Mathematical Society
doi:10.1112/S0024610705006988

COURBES DE GENRE 5 MUNIES D'UNE INVOLUTION SANS POINT FIXE

JEAN D'ALMEIDA, LAURENT GRUSON AND NICOLAS PERRIN

Abstract

We study genus 5 curves C with a fixed point free involution. We give a geometrical (embedded) characterisation of these curves among all genus 5 curves : the points of the Prym variety associated to the involution give embeddings of the curve C in $\mathbb{P}_3$ so that C has infinitely many quadrisecant lines. Conversely, any genus 5 curve having such an embedding is endowed with a fixed point free involution and the embedding is given by a point of the Prym variety.

0. *Introduction*

Dans ce texte, nous nous intéressons à la géométrie des courbes lisses de genre 5 et plus précisement aux courbes lisses de genre 5 munies d'une involution sans point fixe. Nous donnons une caractérisation géométrique de l'existence d'une telle involution : la variété de Prym contenue dans la jacobienne de la courbe définit des plongements particuliers qui caractérisent l'existence d'une involution sans point fixe.

Soit C une courbe de genre 5 munie d'une telle involution, on peut définir sa variété de Prym qui est (en général) la jacobienne d'une courbe Y lisse de genre 2. Nous décrivons à la première section la fibre du morphisme de Prym grâce au plongement $\mathcal{K} \subset \mathbb{P}_3$ de la surface de Kummer associée à Y. Cette étude a été faite en détail par Verra [**26**] pour les recouvrements stables (cf. [**4**]), nous la rappelons rapidement dans le cas des courbes lisses. Nous comparons ensuite cette fibre avec la description de Narasimhan et Ramanan [**21**] de l'espace des modules de fibrés vectoriels de rang 2 sur Y puis avec les surfaces réglées au-dessus de Y.

À la troisième section, nous réalisons les différentes descriptions de la fibre de Prym de manière plongée : nous fixons un diviseur de degré 6 sur Y qui permet de plonger cette courbe dans $\mathbb{P}_4$. Un élément de la fibre du morphisme de Prym (et le choix d'une demi-periode) nous permet de définir un plongement de degré 8 de C dans $\mathbb{P}_3$. Ce plongement a la particularité suivante : la courbe C a une infinité de quadrisécante.

Dans la dernière section, nous montrons que l'existence d'un tel plongement caractérise les courbes de genre 5 munies d'une involution i sans point fixe. Nous décrivons exactement l'ensemble de ces plongements particuliers qui est la composante connexe $\mathfrak{J}(C)$ de

$$\mathrm{Ker}(1+i) \subset \mathrm{Jac}(C)$$

contenant la courbe C plongée par $x \longmapsto K_C + x - i(x)$.

Received 28 May 2004; revised 27 January 2005.

2000 *Mathematics Subject Classification* 14H40, 14H45.

Notons $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ (respectivement $\mathfrak{M}_5^{i,d}$) l'espace de modules des courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe dont la variété de Prym associée est indécomposable (respectivement décomposée). Nous résumons ces résultats dans le théorème suivant.

THÉORÈME 0.1. *Soit C une courbe lisse de genre 5.*

(I) *Caractérisations de $\mathfrak{M}_5^{i,i}$:*

(1) *Première caractérisation: On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement $\mathcal{M}$ de degré 8 de C dans $\mathbb{P}_3$ pour lequel la courbe C a une infinité de quadrisécantes.*

(2) *Seconde caractérisation: On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement $\mathcal{M}'$ de degré 7 de C dans $\mathbb{P}_3$ et une droite L rencontrant C en un point pour lesquels la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.*

Dans cette situation, la courbe Y des quadrisécantes est la même quelque soit le plongement, elle est lisse de genre 2 et telle que $J(Y) = \mathrm{Prym}(C)$. Notons $\mathfrak{J}_0(C)$ les diviseurs $\mathcal{M}$ de degré 8 du premier type, $\mathfrak{J}_1(C)$ les diviseurs $\mathcal{M}'$ de degré 7 du second type. La réunion de ces ensembles est isomorphe à la sous-variété $\mathfrak{J}(C)$ de la jacobienne de C décrite ci-dessus. On a $\mathfrak{J}(C) \simeq J(Y)$ et $\mathfrak{J}_1(C)$ correspond à l'image de C.

(II) *Caractérisation de $\mathfrak{M}_5^{i,d}$: On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,d}$ si et seulement s'il existe un morphisme de C dans $\mathbb{P}_3$ tel que son image $\overline{C}$ est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques, de degré 8 et a deux points doubles aux sommets des cônes.*

Dans cette situation, notons $\mathfrak{J}(C)$ les diviseurs de degré 8 de C qui définissent de tels morphismes. On a un morphisme $\mathfrak{J}(C) \longrightarrow E_1 \times E_2$ qui est un fibré principal homogène de groupe H (les E_i sont les courbes elliptiques définissant les cônes cubiques et H le groupe d'Heisenberg associé à $E_1 \times E_2$).

REMARQUE 0.2. Une caractérisation différente des courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe est conjecturée dans [**3**] et démontrée dans [**25**]: une courbe de genre 5 (non hyperelliptique, non trigonale et non bielliptique) est munie d'une telle involution si et seulement si le lieu singulier de son diviseur théta est réductible.

La compréhension de cette caractérisation était une des motivations de départ de notre étude. Malheureusement, nous ne savons pas faire le lien entre les deux caractérisations qui font toutes les deux intervenir des configurations planes d'une conique et d'une cubique mais sans lien évident entre elles (pour plus de détails, voir [**2**]).

Dans tout le texte, nous nous intéressons aux courbes C lisses de genre 5 non hyperelliptiques. Commençons par le lemme suivant qui nous permettra de supposer que C est aussi non trigonale.

LEMME 0.3. *Soit C une courbe de genre 5 non hyperelliptique et munie d'une involution sans point fixe, alors C est non trigonale.*

Preuve. Supposons que C soit trigonale. Soit D un g_3^1 sur C, si D est invariant par l'involution i (c'est-à-dire $i^*D = D$), alors l'involution i induit une involution sur $\mathbb{P}_1$ par le morphisme déduit de D. Cette dernière a nécessairement au moins un point fixe. La fibre du morphisme au-dessus d'un point fixe étant stable par i et formée de trois points, elle a au moins un point fixe par i ce qui est absurde. Si D n'est pas fixé par l'involution, soit $D' = i^*D$. On peut alors regarder le morphisme

$$C \longrightarrow \mathbb{P}(H^0 D) \times \mathbb{P}(H^0 D') = \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset \mathbb{P}(H^0 D \otimes H^0 D') = \mathbb{P}_3.$$

L'image de C est une courbe de bidegré $(3,3)$ dans la quadrique, c'est-à-dire une courbe de genre arithmétique 4, c'est impossible car C est de genre 5. □

1. *La fibre du morphisme de Prym*

Dans cette section nous décrivons la fibre du morphisme de Prym au-dessus de la jacobienne d'une courbe Y lisse de genre 2. Nous relions cette fibre aux fibrés vectoriels de rang 2 sur Y et aux surfaces réglées associées.

Une courbe C de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3 est munie d'une involution i sans point fixe (l'échange des points d'une fibre). La jacobienne $J(C)$ de C est alors elle aussi munie d'une involution que l'on note encore i. On définit la variété de Prym associée par $\mathrm{Prym}(C,i) = \mathrm{Im}(1-i)$ (cf. par exemple [**3**, Chapitre VI, appendix C] ou [**19**]). C'est une variété (ici une surface) abélienne principalement polarisée.

Cette construction définit un morphisme

$$\mathrm{Prym} : \mathfrak{M}_5^i \longrightarrow \mathfrak{A}_2,$$

où $\mathfrak{A}_2$ est l'espace de modules (grossier) des surfaces abéliennes principalement polarisées et $\mathfrak{M}_5^i$ le localement fermé de l'espace des modules des courbes de genre 5 formé des courbes non hyperelliptiques et non trigonales qui sont munies d'une involution sans point fixe. L'image d'une courbe C est en général une surface abélienne indécomposable, c'est alors la jacobienne d'une courbe Y de genre 2. Nous notons $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ l'ouvert de $\mathfrak{M}_5^i$ correspondant à ce cas. Dans le cas contraire, la variété de Prym est le produit de deux courbes elliptiques et nous notons $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ le fermé correspondant.

La fibre de ce morphisme a été étudiée par de nombreux auteurs (voir par exemple [**6**–**8**, **26**]). En particulier Verra [**26**] la décrit complètement (en incluant les revêtement admissibles introduits par [**4**]).

Dans un premier temps nous rappelons ces résultats en décrivant la fibre comme le quotient $U(A)/H$ d'un ouvert $U(A)$ de l'espace projectif $\mathbb{P}_3^\vee$ contenant la surface de Kummer duale $\mathcal{K}^\vee$ par le groupe d'Heisenberg H (voir sous-section 1.1 pour les définitions). Nous nous contentons du cas des revêtements de courbes lisses mais decrivons plus en détail le cas d'un produit de courbes elliptiques.

Dans un second temps, si Y est une courbe de genre 2 telle que $A = J(Y)$, nous rappelons les résultats de Narasimhan et Ramanan [**21**] qui montrent que l'espace des modules des faisceaux sur Y de déterminant de degré pair fixé s'identifie à $\mathbb{P}_3^\vee$. Les surfaces réglées de base Y s'identifient alors à $\mathbb{P}_3^\vee/H$. Nous décrivons directement une correspondance entre la fibre $\mathrm{Prym}^{-1}(A)$ et les surfaces réglées de base Y.

1.1. *Notations et rappels*

Nous rappelons ici quelques résultats sur les courbes de genre 2, leur jacobienne et la surface de Kummer associée. Pour plus de détails, voir [**14**] ou [**18**].

Surface de Kummer: Soit $A \in \mathfrak{A}_2$ une surface abélienne principalement polarisée et soit Θ_A son diviseur théta. Ce diviseur définit un morphisme $A \longrightarrow \mathbb{P}(H^0(2\Theta_A)) \simeq \mathbb{P}_3$. L'image $\mathcal{K}$ de ce morphisme est le quotient $A/\mathrm{Aut}(\Theta_A)$. Si A est indécomposable cette image est la surface de Kummer $\mathcal{K} \simeq J(Y)/-1$ associée à la courbe Y de genre 2 telle que $J(Y) = A$. Si A est décomposable isomorphe au produit de courbes elliptiques $E_1 \times E_2$, alors le morphisme est de degré 4 et l'image est une quadrique lisse de $\mathbb{P}_3$. Voir par exemple [**26**] pour plus de détails.

Groupe d'Heisenberg: Le groupe H des éléments d'ordre 2 de A est fini d'ordre 16 isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^4$. Ce groupe est le quotient du groupe d'Heisenberg $\mathcal{H}$ à 32 éléments par son centre (cf. [**18**] ou [**20**]). Par abus de notation nous l'appelerons encore groupe d'Heisenberg associé à A. Il agit linéairement sur $\mathbb{P}_3$ et laisse stable la surface $\mathcal{K}$. Notons Z son image dans $\mathcal{K}$. Dans le premier cas Z est l'ensemble des points doubles de $\mathcal{K}$ et H est le groupe des automorphismes de $\mathcal{K}$ (ils laissent nécessairement fixe Z voir [**14**] ou [**18**, p. 353]). Dans le second cas, on a une involution i_k donnée par le diviseur $2\Theta_{E_k}$ sur chacune des courbes E_k. Le lieu de ramification sur $\mathcal{K}$ du morphisme $A \longrightarrow \mathcal{K}$ est la réunion de quatre droites de chaque famille. L'ensemble Z est le groupe de seize points obtenus comme intersection de ces droites. Le groupe H est le sous-groupe du groupe des automorphismes de $\mathcal{K}$ laissant stable Z.

Remarquons que l'on a une involution $i_1 \times i_2$ sur A. Notons $\widetilde{\mathcal{K}}$ le quotient de A par cette involution. On a alors une suite $A \longrightarrow \widetilde{\mathcal{K}} \longrightarrow \mathcal{K}$ de morphismes de degré 2. Le premier est ramifié au dessus de l'image réciproque de Z dans $\widetilde{\mathcal{K}}$ alors que le second est ramifié au dessus des quatre droites de chaque famille.

Notation: Notons $U(A)$ l'ouvert de $\mathbb{P}_3^\vee$, invariant par H, des plans de $\mathbb{P}_3$ qui ne sont pas tangents à la surface $\mathcal{K}$ et ne passant pas par un point de Z. Si $\mathcal{K}^\vee \subset \mathbb{P}_3^\vee$ est la surface de duale de $\mathcal{K}$ et $Z^\vee$ la réunion des seize plans duaux des seize points de Z. L'ouvert $U(A)$ est $\mathbb{P}_3^\vee$ privé de $\mathcal{K}^\vee \cup Z^\vee$.

1.2. *Première description de la fibre*

Soit A une surface abélienne. Rappelons la description classique de la fibre du morphisme de Prym (pour plus de détails, voir [**26**] ou [**2**]).

PROPOSITION 1.1. *La fibre* $\mathrm{Prym}^{-1}(A)$ *est isomorphe au quotient* $U(A)/H$.

Preuve. Nous esquissons la preuve, pour plus de détails, voir [**2**, proposition 2.1].

Si x est un point de $U(A) \subset \mathbb{P}_3^\vee$, il définit un plan $x^\vee$ de $\mathbb{P}_3$ qui rencontre $\mathcal{K}$ en une courbe lisse X de genre 3. Son image réciproque C dans A est un recouvrement non ramifié qui nous donne la courbe de genre 5. Si on fait agir le groupe H sur $\mathbb{P}_3^\vee$, on change la courbe C par la translation par la demi-periode correspondante d'où le passage au quotient.

Dans le premier cas, la courbe $X = \widetilde{X}$ est une quartique lisse donc de genre 3. On définit alors la courbe $C \subset A$ image réciproque de $\widetilde{X}$ par le morphisme $A \longrightarrow \mathcal{K}$. C'est un revêtement double de X qui est non ramifié car X évite les points doubles de $\mathcal{K}$.

Réciproquement soit $C \in \mathrm{Prym}^{-1}(A)$ et X le quotient de C par l'involution. L'image du morphisme

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow \mathrm{Ker}(1+i) \\ x &\longmapsto x - i(x) \end{aligned}$$

est contenue dans une composante connexe de $\mathrm{Ker}(1+i)$ que l'on peut identifier à $A = \mathrm{Im}(1-i)$ (cette composante n'est pas celle de l'identité) grâce au choix d'une demi-période. C'est une immersion de C dans A.

La courbe C est invariante par l'involution $x \longmapsto -x$ de A qui correspond à l'involution i sur C. On montre que C est linéairement équivalente à $2\Theta_A$ sur A donc son image dans l'espace projectif contenant la Kummer est une section hyperplane (isomorphe à X) qui définit $x \in U(A)$. Selon le choix de la demi-période on obtient toute l'orbite de x sous H. $\square$

2. *Fibrés vectoriels et surfaces réglées*

Dans cette section nous montrons le lien entre la fibre du morphisme de Prym et les surfaces régles au-dessus de Y. Nous décrivons les différentes surfaces obtenues selon la courbe de genre 5.

Par soucis de concision, nous rappelerons rapidement certains résultats classiques sur les fibrés vectoriels sur une courbe Y de genre 2 et sur les sections hyperplanes de la surface de Kummer associée. Nous ferons également référence à des résultats que nous prouverons à la remarque 4.12 grâce aux plongements particuliers des courbes de $\mathfrak{M}_5^i$ décrits à la prochaine section.

2.1. *Fibrés vectoriels*

Commençons par rappeler le résultat suivant, dû à Narasimhan et Ramanan [**21**].

Théorème 2.1. *L'espace des modules des fibrés vectoriels de rang* 2 *et de déterminant trivial sur une courbe Y de genre* 2 *est isomorphe à l'espace projectif $\mathbb{P}_3^\vee$ contenant la surface de Kummer duale $\mathcal{K}^\vee$.*

Donnons une description rapide de cet isomorphisme : un fibré vectoriel E de déterminant trivial est entièrement caractérisé par le diviseur de $\mathrm{Pic}_1(Y)$:

$$C(E) = \{\beta \in \mathrm{Pic}_1(Y) / h^0(E \otimes \beta) > 0\},$$

qui est linéairement équivalent à $2\Theta_Y$. Son image dans $\mathbb{P}_3$ est donc une section hyperplane (c'est-à-dire un élément de $\mathbb{P}_3^\vee$) qui détermine complètement E. Cette courbe $C(E)$ peut aussi être vue comme l'ensemble des $\beta \in \mathrm{Pic}_1(Y)$ tels que E soit une extension de la forme

$$0 \longrightarrow \beta^{-1} \longrightarrow E \longrightarrow \beta \longrightarrow 0.$$

Remarque 2.2. Si $x \in \mathbb{P}_3^\vee$ correspond au fibré E, soit alors $x^\vee$ son plan dual dans $\mathbb{P}_3$. La courbe $C(E)$ est l'image réciproque de $X = \mathcal{K} \cap x^\vee$ dans $\mathrm{Pic}_1(Y)$. On a alors (cf. [**26**]) les suivants.

(1) Si x est général, alors la courbe X est une quartique lisse de genre 3. La courbe $C(E)$ est une courbe lisse de genre 5 revêtement double non ramifié de X.

(2) Si $x \in \mathcal{K}^\vee$ est général, alors la courbe X est une quartique avec un point double. Le modèle non singulier de X est la courbe Y. La courbe $C(E)$ est une courbe lisse de genre 4 revêtement double de Y ramifié en deux points (les images réciproque du point double de X).

(3) Si x est contenu dans un des seize plans tangents à $\mathcal{K}^\vee$ selon une conique, alors X est une quartique avec un point double, son modèle non singulier est la courbe Y. La courbe $C(E)$ a un point double, son modèle non singulier est de genre 4 revêtement double de Y ramifié en deux points (les images réciproque du point double de X).

(4) Si x est contenu dans deux (respectivement trois) des seize plans tangents à $\mathcal{K}^\vee$ selon une conique, alors X est une quartique avec deux (respectivement trois) points doubles, son modèle non singulier est de genre 1 (respectivement 0). La courbe $C(E)$ a deux (respectivement trois) points doubles, son modèle non singulier est de genre 3 (respectivement 2).

(5) Si x est sur une des seize coniques passant par six points doubles de $\mathcal{K}^\vee$, alors X est une quartique avec un point double cuspidal, son modèle non singulier est la courbe Y. La courbe $C(E)$ est le modèle non singulier et est donc isomorphe à Y.

(6) Si x est l'un des seize points doubles de $\mathcal{K}^\vee$, alors X est une conique double passant par six points doubles. La courbe $C(E)$ est alors isomorphe à la courbe Y et est revêtement double de la conique ramifié aux six points doubles.

2.2. *Surfaces réglées*

Une surface réglée 'abstraite' sur la courbe Y de genre 2 est la donnée d'une fibration en droites projectives

$$S \longrightarrow Y.$$

Une telle fibration correspond toujours à un fibré vectoriel E de rang 2 tel que $S \simeq \mathbb{P}_Y(E)$ (cf. [**13**] par exemple). Deux surfaces définies par des fibrés E et E' sont isomorphes si et seulement si il existe $\mathcal{L}$ inversible sur Y tel que $E' \simeq E \otimes \mathcal{L}$. Si les déterminants de E et E' sont triviaux, ceci impose la condition $\mathcal{L}^{\otimes 2} \simeq \mathcal{O}_Y$. Ceci nous donne la suivante.

Proposition 2.3. *On a un isomorphisme* $\mathrm{Reg}(Y) \simeq \mathbb{P}_3^\vee/H$ *entre la variété* $\mathrm{Reg}(Y)$ *des surfaces réglées et le quotient* $\mathbb{P}_3^\vee/H$.

La structure de variété sur $\mathrm{Reg}(Y)$ est en fait définie a posteriori à partir de l'identification précédente.

On peut décrire cette correspondance directement à partir de la géométrie de la surface réglée. Un élément de $C(E)$ définit une section de $E \otimes \beta$ qui donne une surjection $E \longrightarrow \beta$. Sur la surface réglée $\mathbb{P}_Y(E)$, cette surjection correspond à une section s de self-intersection 2. La classe de s^*T_r où T_r est le fibré tangent relatif est alors 2β.

Réciproquement, soit S une surface réglée et notons T_r le fibré tangent relatif. Si s est une section de self-intersection 2, alors le diviseur s^*T_r est de degré 2 sur Y. On peut alors considérer la courbe

$$C(S) = \{\xi \in \mathrm{Pic}_2(Y) \ / \ \exists\, s \text{ section de } S \text{ avec } \xi = s^*T_r\}.$$

Cette courbe est l'image de $C(E)$ par le morphisme $m : \mathrm{Pic}_1(Y) \xrightarrow{\times 2} \mathrm{Pic}_2(Y)$. Elle est bien définie et le choix d'un fibré E correspond au choix d'une composante irréductible de $m^{-1}(C(S))$ (qui est une orbite sous H). Les courbe $C(E)$ et $C(S)$ sont isomorphes.

Définition 2.4. Nous appelerons admissibles les surfaces réglées S au-dessus de Y telles que $C(S)$ est une courbe lisse de genre 5. Nous noterons $\mathrm{Reg}_a(S)$ l'ouvert des surfaces admissibles.

On a alors comme corollaire immédiat de la discussion précédente le résultat suivant.

Corollaire 2.5. *Soit A la jacobienne de Y. Avec les notations précédentes, on a un isomorphisme* $\mathrm{Reg}_a(S) \simeq U(A)/H$.

Remarquons que pour une surface admissible S, la courbe $C(S)$ est de genre 5, revêtement double non ramifié d'une courbe de genre 3 (cf. remarque 2.2) et la variété de Prym de $C(S)$ est la jacobienne de Y. La fibre du morphisme de Prym étant décrite par le quotient $U(A)/H$, il est donc naturel de comparer les surfaces réglées admissibles au-dessus de Y avec la fibre du morphisme de Prym.

2.3. *Fibre de Prym*

Nous avons défini un morphisme $\mathrm{Reg}_a(Y) \longrightarrow \mathrm{Prym}^{-1}(Y)$ par $S \longmapsto C(S)$. Nous construisons un morphisme réciproque.

Proposition 2.6. *On a un isomorphisme entre* $\mathrm{Prym}^{-1}(Y)$ *et* $\mathrm{Reg}_a(Y)$ *qui est compatible avec les identifications de chacun des espaces avec le quotient* $U(A)/H$.

Preuve. Nous pouvons associer à une courbe $C \in \mathrm{Prym}^{-1}(Y)$ une surface réglée au dessus de Y. En effet, la courbe Y est une composante irréductible de la variété des $\mathbf{g}^1_4$ sur C (cf. [**3**, p. 273]). Considérons le morphisme d'Abel–Jacobi

$$u : \mathrm{Div}_4(C) \longrightarrow \mathrm{Pic}_4(C).$$

Soit $S(C)$ l'image réciproque par u de Y vue dans $\mathrm{Pic}_4(C)$ comme une composante irréductible de la variété des $\mathbf{g}^1_4$. La variété $S(C)$ est une surface réglée au dessus de Y. En effet, les fibres de u au dessus de $\mathcal{L}$ sont données par l'espace projectif $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L})^\vee$ et si $\mathcal{L} \in Y$, cet espace projectif est de dimension 1 (la dimension ne peut être supérieure à 2 sinon C est trigonale).

Remarquons qu'un point $x \in C$ définit une section de la surface $S(C)$ au-dessus de Y : en effet, pour tout point α de Y vu comme $\mathbf{g}^1_4$ de C, il existe un unique élément $s^\alpha_x \in H^0(\alpha)$ qui s'annule en x. L'application $\alpha \longmapsto s^\alpha_x$ est une section de $S(C)$.

Nous monterons grâce aux plongements particuliers de C que les self-intersections de ces sections valent 2 et que deux telles sections $\alpha \longmapsto s^\alpha_x$ et $\alpha \longmapsto s^\alpha_y$ pour $x \neq y$ sont distinctes (cf. remarque 4.12).

Considérons la courbe $C(S(C)) \subset \mathrm{Pic}_2(Y)$, on a un morphisme génériquement injectif : $C \longrightarrow C(S(C))$. On doit donc avoir un isomorphisme entre C et le modèle non singulier de $C(S(C))$. La remarque 2.2 nous dit que le genre géométrique de

$C(S(C))$ est 5 si et seulement si $C(S(C))$ est lisse de genre 5. On doit donc avoir un isomorphisme $C \simeq C(S(C))$.

Le morphisme $C \longmapsto S(C)$ est donc la composée des identifications $\mathrm{Prym}^{-1}(Y) \simeq U(A)/H$ et $U(A)/H \simeq \mathrm{Reg}_a(Y)$.

Le plongement de C dans $\mathrm{Pic}_2(Y)$ donné par $C \longmapsto C(S(C))$ est le plongement de C dans $J(Y)$ de la proposition 1.1 en choisissant K_Y pour origine dans $\mathrm{Pic}_2(Y)$ (cf. théorème 4.11 et la description des plongements). □

2.4. *Plongements et lieu singulier*

À la prochaine section, nous décrivons les correspondances précédentes de manière plongée. Nous verrons d'une nouvelle manière la correspondance entre $\mathrm{Prym}^{-1}(Y)$ et $\mathrm{Reg}_a(Y)$.

Fixons un plongement de Y : soit $\mathcal{L}$ un diviseur de degré 6 sur Y. Soit S une surface réglée associée à un fibré E de rang 2 (et de degré pair). On peut supposer que le déterminant de E est $\mathcal{L}$.

Le plongement $\mathcal{L}$ permet de plonger la surface S : on montre que $\dim_{\mathbb{C}}(H^0E) = 4$ et que le fibré E est engendré par ses sections. La surjection $H^0E\otimes\mathcal{O}_Y \longrightarrow E$ définit un plongement de la surface réglée S associée dans $\mathbb{P}(H^0E)$.

Le lieu singulier abstrait de cette surface (cf. [**1**]) est une courbe de $\mathrm{Div}_2(Y)$. C'est une courbe de genre 5 et nous verrons au prochain section que cette courbe est celle décrite ci-dessus.

La correspondance bijective $\mathrm{Prym}^{-1}(Y) \simeq \mathrm{Reg}(Y)$ montre que la surface S est déterminée par son lieu singulier abstrait (la courbe C). Dans [**22**] nous avons montré ce résultat pour toutes les surfaces rationnelles réglées.

2.5. *Des plongements particuliers*

Nous décrirons un peu plus que la correspondance de la proposition 2.6. En effet, notons $M_Y(2,6)$ l'espace des modules des fibrés vectoriels de rang 2 et de degré 6 sur Y (nous ne fixons plus le déterminant). D'après le résultat de Narasimhan et Ramanan, c'est une fibration en $\mathbb{P}_3$ au dessus de $\mathrm{Pic}_6(Y)$ donnée par le déterminant.

Si $E \in M_Y(2,6)$ la courbe $C(E)$ n'est pas parfaitement définie : il faut choisir $\mathcal{L}$ tel que $E \otimes \mathcal{L} \simeq \mathcal{O}_Y$. Ce $\mathcal{L}$ n'est défini qu'à une demi-période près donc $C(E)$ est définie à action de H près. Par contre, la surface réglée S associée est bien définie et la courbe $C(S)$ également (c'est l'image de $C(E)$ par multiplication par 2 ce qui annule l'incertitude sur les demi-périodes).

On a donc le diagramme suivant.

$$\begin{array}{ccc} M_Y(2,6) & \longrightarrow & \mathrm{Reg}(Y) \simeq \mathbb{P}_3^\vee/H \\ \big\downarrow & & \\ \mathrm{Pic}_6(Y) & & \end{array}$$

Notons alors $\mathfrak{J}$ la fibre au-dessus d'un point général de $\mathrm{Reg}(Y)$. C'est un $J(Y)$-espace principal : on a une action transitive et libre de $J(Y)$ donnée par $(E,\mathcal{L}) \longmapsto E \otimes \mathcal{L}$. Nous l'identifions à $J(Y)$ en fixant un point E_0 de la fibre qui est alors donnée par les $E_0 \otimes \mathcal{L}$ pour $\mathcal{L} \in J(Y)$.

On a un morphisme $\mathfrak{J} \longrightarrow J(Y)$ donné par $E_0 \otimes \mathcal{L} \longmapsto \det(E_0 \otimes \mathcal{L})\det(E_0)^{-1} = \mathcal{L}^{\otimes 2}$, ou encore avec l'identification de $\mathfrak{J}$ avec $J(Y)$ un morphisme $J(Y) \xrightarrow{2} J(Y)$.

À la prochaine section, nous décrivons les correspondances de la proposition 2.6 et même le diagramme ci-dessus de manière plongée : nous fixons un élément $\mathcal{L} \in$

$\mathrm{Pic}_6(Y)$ qui plonge la courbe Y. Nous réalisons les constructions précédentes de manière plongée ce qui permet en particulier de définir des plongements de degré 8 particuliers des courbes $C \in \mathrm{Prym}^{-1}(Y)$. Ces plongements correspondent à la fibre $\mathfrak{J}$, on voit ainsi que la présence de l'involution plonge $J(Y)$ dans $\mathrm{Pic}_8(C)$ et ces éléments définissent des plongements caractérisant les courbes de $\mathrm{Prym}^{-1}(Y)$.

3. *Réalisation géométrique*

Nous allons ici réaliser les deux descriptions de la fibre décrites à la section précédente (proposition 1.1 et section 2) de manière géométrique, c'est-à-dire avec des courbes plongées.

Nous montrerons ainsi qu'une courbe $C \in \mathfrak{M}_5^i$ possède une famille de plongements particuliers (provenant des éléments de la jacobienne de Y dans $J(C)$) qui caractérisent l'existence de l'involution sans point fixe.

3.1. *Plongement de la surface de Kummer duale*

Commençons par le cas indécomposable. Soit Y une courbe lisse de genre 2, on note A sa jacobienne et $\mathcal{K}$ la surface de Kummer associée. Fixons $\mathcal{L}$ un fibré inversible de degré 6 sur Y. On considère le plongement de C donné par $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$. On a toujours $h^0\mathcal{I}_Y(2) = 4$ (cf. [**12**]), c'est-à-dire que les quadriques contenant Y forment un espace projectif de dimension 3.

Remarquons que comme il n'y a pas de diviseur ξ de degré 3 sur Y tel que $h^0\xi = 3$, la courbe Y n'a jamais de trisécante dans $\mathbb{P}_4$.

Notons $\mathfrak{C}$ la sous-variété des quadriques singulières. C'est une variété déterminantielle dont la dimension attendue est 2 et le degré attendu 5.

Proposition 3.1. *La variété $\mathfrak{C}$ est la réunion d'un plan et d'une surface de degré* 4 *isomorphe à $\mathcal{K}^\vee$. Le plan est le plan dual du point correspondant à $\mathcal{L} \in J(Y)$.*

Preuve. Nous décrivons toutes les quadriques Q contenant la courbe Y.

(1) Si Q est de rang inférieur ou égal à 2, alors la quadrique est formée de la réunion de deux hyperplans ou d'un hyperplan double. La courbe Y est alors dégénérée ce qui est absurde.

(2) Si Q est de rang 3, alors son noyau est une droite L de $\mathbb{P}_4$. Cette droite rencontre Y en au plus quatre points sinon la courbe Y serait contenue dans un hyperplan (engendré par la droite et deux autres points de Y). Soit donc x la longueur du schéma $Y \cap L$, on a $x = 0,\ 2$ ou 4 et considérons la projection de centre la droite L. Elle définit un morphisme de Y vers une conique.

- (i) Si $x = 4$, alors le morphisme est un isomorphisme ce qui est absurde (Y est de genre 2).
- (ii) Si $x = 2$, le mophisme est de degré 2 et est donné par la composée du revêtement double $Y \longrightarrow \mathbb{P}_1$ défini par K_Y avec le plongement de Veronese $\mathbb{P}_1 \longrightarrow \mathbb{P}_2$. On a donc $\mathcal{L} = 2K_Y + D$ où D est le diviseur correspondant aux deux points de $L \cap Y$. Le diviseur D est alors déterminé et de degré 2. Les deux points de $L \cap Y$ sont donc uniquement déterminés sauf si $D = K_Y$.
  - (a) Ainsi, si $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, alors L est unique (correspondant au diviseur effectif associé à $\mathcal{L} - 2K_Y$) et la quadrique est également unique.

(b) Si par contre $\mathcal{L} = 3K_Y$, alors on a un $\mathbb{P}_1$ de choix pour la droite L (toutes les bisécantes qui coupent Y en deux points en involution), il y a donc le même $\mathbb{P}_1$ de quadriques.

(iii) Si $x = 0$, on a alors un morphisme de degré 3 de C vers $\mathbb{P}_1$. Soit D le diviseur associé, on a $\deg D = 3$ et $h^0 D = 2$. Le morphisme vers la conique est donné par $Y \longrightarrow \mathbb{P}(H^0 D) \xrightarrow{v} \mathbb{P}(S^2 H^0 D)$ où v est le plongement de Veronese. On a ici $\mathcal{L} = 2D$. Si D_0 est un tel diviseur, les autres diviseurs sont donnés par $D + M$ avec M une demi-période (c'est-à-dire $2M = 0$). On a donc un nombre fini de tels diviseurs. La quadrique est alors déterminée par D. La droite L est le quotient de rang 2 défini par le conoyau de la flèche : $S^2(H^0 D) \longrightarrow H^0(2D)$ et la conique l'image de $\mathbb{P}(H^0 D)$ dans $\mathbb{P}(S^2 H^0 D)$.

(3) Il reste le cas général où la quadrique est de rang 4, le noyau de Q est alors un point P et on projette par rapport à ce point (notons π_P cette projection). On obtient alors un morphisme de Y vers une quadrique de $\mathbb{P}_3$. Le morphisme $\pi_P|_Y$ est de degré 6 si $P \notin Y$ et de degré 5 sinon.

(i) Supposons que $P \in Y$, la courbe $\pi_P(Y)$ est de degré divisant 5 dans $\mathbb{P}_3$. Elle ne peut être de degré 1 sinon Y serait dégénérée. Elle est donc de degré 5 (et de genre 2) et est contenue dans une unique quadrique. Ceci nous donne une famille de dimension un de quadriques.

(ii) Reste le cas général où le point P n'est pas dans Y. L'image $\pi_P(Y)$ est alors une courbe de degré divisant 6, c'est à dire de degré 1,2,3 ou 6. De plus $\pi_P(Y)$ ne peut être plane sinon Y serait dégénérée. Donc $\pi_P(Y)$ est de degré 3 ou 6 irréductible et n'est pas plane.

(a) Si $\deg(\pi_P(Y)) = 3$, alors la courbe $\pi_P(Y)$ est une cubique gauche et le morphisme $Y \longrightarrow \pi_P(Y)$ est de degré 2 donné par le diviseur K_Y et la composition avec le plongement de Veronese $\mathbb{P}(H^0 K_Y) \longrightarrow \mathbb{P}(S^3 H^0 K_Y)$. On a alors nécessairement $\mathcal{L} = 3K_Y$ et le point P est déterminé par le conoyau de $S^3 H^0 K_Y \longrightarrow H^0(3K_Y)$. Dans ce cas $\pi_P(Y)$ est contenue dans un plan de quadriques qui se relève en un plan dans $\mathbb{P}(H^0 \mathcal{I}_Y(2)^\vee)$.

(b) Si $\deg(\pi_P(Y)) = 6$, la projection $Y \longrightarrow \pi_P(Y)$ est birationnelle. La courbe $\pi_P(Y)$ est de degré 6 contenue dans une quadrique lisse $\overline{Q}$ et son genre géométrique est 2. Dans $\overline{Q}$, la classe de $\pi_P(Y)$ est (a, b) avec $a + b = 6$ et $(a - 1)(b - 1) \geqslant 2$. On a donc deux possibilités : $(a, b) = (2, 4)$ ou $(a, b) = (3, 3)$.

Si $(a, b) = (2, 4)$, la projection sur le premier facteur donne un morphisme φ de degré 2 de Y vers $\mathbb{P}_1$ (donc défini par K_Y). L'image réciproque d'un point du premier facteur de $\overline{Q}$ dans C est une bisécante en involution. La quadrique Q contient donc la surface S recouverte par les bisécantes en involution. Cette surface est de degré 3. Une quadrique contenant Y contient S si et seulement si elle contient en plus un point x_0 de $S - C$. En effet, dans ce cas on a $C \cup \{x_0\} \subset S \cap Q$. Mais comme Q est de degré 2 et S de degré 3, on a $Q \cap S$ est une courbe de degré 6 ou $S \subset Q$. C'est donc que $S \subset Q$.

L'ensemble des quadriques contenant x_0 forme un plan dans $\mathbb{P}(H^0 \mathcal{I}_Y(2))$. Par ailleurs toutes ces quadriques sont singulières. En effet, si une de ces quadriques était lisse, la surface S serait alors intersection complète (sur une quadrique lisse de $\mathbb{P}_4$, toute surface est intersection complète, car le groupe de Picard de la quadrique est $\mathbb{Z}$). C'est absurde car son degré (qui est 3) devrait alors être un multiple de celui de Q (qui est 2). Ceci nous donne le plan. Remarquons que si $\mathcal{L} = 3K_Y$, la surface S est un cône et le plan précédent a été décrit en sous-section (3)(ii)(a).

Si $(a, b) = (3, 3)$, la courbe $\pi_P(Y)$ a deux points doubles. On a donc deux bisécantes passant par P. Soient ξ_1 et ξ_2 les diviseurs de degrés 2 définis par ces bisécantes. Comme elles sont concourrantes, on a $h^0(\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2) \geqslant 2$. Or $\deg(\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2) = 2$ donc $\mathcal{L} - \xi_1 - \xi_2 = K_Y$.

Ainsi pour tout couple de points de Y, on plutôt pour tout diviseur ξ de degré 2 sur Y, il existe un unique diviseur $\xi' = \mathcal{L} - K_Y - \xi$ tel que les deux bisécantes (si $\xi \neq \xi'$) définies par des sections de ξ et ξ' se rencontrent en un point P. Il y a ici deux cas particuliers a traiter à part : lorsque ξ (ou ξ') est K_Y et lorsque $\xi = \xi'$.

En dehors de ces deux cas, la donnée du couple (ξ, ξ') définit deux bisécantes distinctes. Le point d'intersection P est donc bien défini. La projection de Y par P donne une courbe de degré 6 ayant deux points doubles. Elle est donc contenue dans une unique quadrique.

Si $(\xi, \xi') = (K_Y, \mathcal{L} - 2K_Y)$ ou symétriquement si $(\xi, \xi') = (\mathcal{L} - 2K_Y, K_Y)$, on a un $\mathbb{P}_1$ de bisécantes correspondant aux sections de K_Y. Ces bisécantes rencontrent toutes la droitedéfinie par $\mathcal{L} - 2K_Y$ et par projection par rapport à cette droite on retrouve les cas (2)(ii)(a) et (2)(ii)(b) où la quadrique est de rang 3 et où $x = 2$. Ainsi pour ces couples, on a alors un $\mathbb{P}_1$ de quadriques si $\mathcal{L} = 3K_Y$ et une unique quadrique si $\mathcal{L} \neq K_Y$.

Si enfin $\xi = \xi'$ (c'est-à-dire si on a un point double de $\mathcal{K}^\vee$), les deux bisécantes sont alors confondues et les tangentes aux points d'intersection de cette bisécante avec Y se rencontrent. On peut alors choisir pour P n'importe quel point de la bisécante. La projection aura alors un tacnode et sera donc toujours contenue dans une unique quadrique. On a un $\mathbb{P}_1$ de quadriques.

Ainsi, un couple de diviseurs (ξ, ξ') définit un unique cône sauf pour les points en involution sur la jacobienne : les (ξ, ξ') pour lesquels on a un $\mathbb{P}_1$ de quadriques. La surface obtenue est donc isomorphe à la duale $\mathcal{K}^\vee$ de la surface de Kummer $\mathcal{K}$ de Y.

Montrons que le plan est bien le plan dual correspondant au point $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_6(Y)$. Déterminons l'intersection de ce plan et de la surface $\mathcal{K}^\vee$.

Si $\mathcal{L} = 3K_Y$, l'intersection recherchée est formée des quadriques du plan décrit en sous-section (3)(ii) qui sont de rang 3. Elles forment une conique double. Ce plan est donc le plan dual du point double de $\mathcal{K}$ qui correspond à $\mathcal{L}$. Ces quadriques sont exactement les quadriques singulières dont le sommet rencontre Y.

Si $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, on a deux cas. Soit la quadrique a pour sommet une droite et on est dans la situation (2)(ii)(a). Soit la quadrique a pour sommet un point et il doit appartenir à Y. On voit que chaque point de la courbe Y définit un point de l'intersection du plan et de $\mathcal{K}^\vee$, les deux points du diviseur $\mathcal{L} - 2K_C$ se contractant en un même point. L'intersection du plan et de $\mathcal{K}^\vee$ est donc une courbe de degré 4 avec un point double dont la désingularisation est Y. C'est le plan dual du point $\mathcal{L}$. $\square$

Remarque 3.2. Une fois le plongement $\mathcal{L}$ de Y fixé, la donnée d'une quadrique Q contenant Y correspond exactement à la donnée d'un fibré vectoriel E de déterminant $\mathcal{L}$ sur Y. Nous retrouvons le résultat de Narasimhan et Ramanan (théorème 2.1) de manière plongée.

En effet, se donner un point du $\mathbb{P}_3^\vee$ contenant $\mathcal{K}^\vee$ revient à se donner une quadrique contenant la courbe Y dans le plongement $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$ (cf. proposition 3.1). Comme sur une quadrique de $\mathbb{P}_4$ il y a un unique fibré vectoriel de rang 2 tautologique, on a alors un fibré vectoriel de rang 2 et de déterminant $\mathcal{L}$ sur Y.

Réciproquement si on a un fibré vectoriel E de rang 2 sur Y et de déterminant $\mathcal{L}$, alors on a une forme quadratique sur $\Lambda^2 H^0 E$ qui induit une forme quadratique sur $H^0(\Lambda^2 E) = H^0\mathcal{L}$. Cette forme quadratique correspond à une quadrique contenant Y et donc à un point de $\mathbb{P}_3^\vee$.

Le plan de quadriques non lisses marqué correspond aux fibrés E obtenus comme extensions :

$$0 \longrightarrow \omega_Y \longrightarrow E \longrightarrow \omega_Y \otimes D \longrightarrow 0,$$

où $D = \mathcal{L} - 2K_Y$.

Une fois une quadrique (ou de manière équivalente un fibré vectoriel de détéminant $\mathcal{L}$) fixée la courbe de genre 5 apparaîtra comme lieu singulier de la surface réglée associée (elle est donc plongee).

Nous traitons maintenant le cas décomposé. Soit $A = E_1 \times E_2$ une surface abélienne décomposée où les E_i sont des courbes elliptiques avec un point marqué. Soit $Y = E_1 \cup E_2$ la réunion transversale des deux courbes de genre 1 se rencontrant en leur point marqué. Notons $\mathcal{K}$ la surface de Kummer associée et fixons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \boxtimes \mathcal{L}_2$ un diviseur de bidegré $(3,3)$ sur Y. On plonge alors Y par $\mathcal{L}$ dans $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L}) = \mathbb{P}_4$. On a toujours $h^0\mathcal{I}_Y(2) = 4$ et donc un espace projectif de dimension 3 de quadriques contenant Y.

Notons Π_i le plan de $\mathbb{P}_4$ contenant E_i. Toutes les quadriques Q contenant Y contiennent les plans Π_i. Elles sont donc singulières et leur sommet contient le point $P = \Pi_1 \cap \Pi_2$.

Notons $\mathfrak{C}$ la sous-variété des quadriques de rang inférieur à 3.

Proposition 3.3. *La variété $\mathfrak{C}$ est isomorphe à la surface $\mathcal{K}^\vee$.*

Preuve. On effectue la projection à partir du point P et on arrive dans un espace projectif de dimension 3. Les courbes E_1 et E_2 (ainsi que les plans Π_1 et Π_2) ont pour images deux droites disjointes. On cherche toutes les quadriques de rang inférieur à 3 contenant ces deux droites.

Soit Q une telle quadrique et supposons qu'elle est de rang exactement 3. Soit alors x son sommet (c'est un point). On projette à partir de x, l'image de Q doit être une conique lisse et doit contenir l'image des deux droites. Ceci n'est jamais possible. La quadrique Q est donc réunion de deux plans chacun contenant l'une des deux droites.

Dans $\mathbb{P}_4$ les quadriques contenant Y sont les réunions de deux hyperplans l'un contenant Π_1, l'autre contenant Π_2. Ils forment une surface isomorphe à $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$. On a un morphisme de $E_1 \times E_2$ vers cette surface : à un point de E_1 on associe l'hyperplan contenant Π_2 et ce point et de manière symétrique pour E_2. On retrouve le recouvrement $E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathcal{K}^\vee$. □

3.2. *La surface abélienne*

Nous pouvons maintenant réaliser le morphisme $A \longrightarrow \mathcal{K}$ de la surface abélienne vers la surface de Kummer.

Lorsque Y est lisse de genre 2, le morphisme $\mathrm{Div}_2(Y) \longrightarrow A$ qui à un diviseur de degré 2 associe sa classe de fibré inversible de degré 2, est l'éclatement du point K_Y. Ainsi pour tout élément ξ de A différent de K_Y, il existe dans $\mathbb{P}_4$ une unique bisécante à Y telle que $L_\xi \cap Y = \xi$ (lorsque $\xi = K_Y$ il y a un $\mathbb{P}_1$ de telles bisécantes). Cette correspondance est bijective en dehors de $\xi = K_Y$.

Si Y est réunion de deux courbes elliptiques E_1 et E_2 se coupant en un point P, alors pour tout point $\xi \in A = E_1 \times E_2$, on a une unique bisécante L_ξ correspondante. Cette correspondance est bijective en dehors des points (x, P) et (P, y) pour lesquels une bisécante définit deux points de A.

Nous avons donc décrit A (au moins birationnellement) comme les bisécantes L_ξ à la courbe Y. Par ailleurs, nous avons vu à la proposition 3.1 que la duale $\mathcal{K}^\vee$ de la surface de Kummer est formée des cônes de $\mathbb{P}_4$ contenant Y. La surface de Kummer est donc contenue dans le $\mathbb{P}_3$ des plans de quadriques contenant Y. Nous allons réaliser le morphisme $A \longrightarrow \mathcal{K}$ de manière plongée.

Soit ξ un point de A (différent de K_Y si Y est lisse) et soit L_ξ la bisécante de Y définie par ξ. On peut alors associer à ξ le plan H_ξ de $\mathbb{P}(H^0\mathcal{I}_Y(2)^\vee) = \mathbb{P}_3^\vee$ des quadriques contenant $Y \cup L_\xi$. C'est bien un plan car pour qu'une quadrique contenant Y contienne L_ξ il suffit qu'elle contienne un point de plus de L_ξ.

Lemme 3.4. (I) *Soit Q une quadrique contenant $L_\xi \cap Y$, alors Q contient la bisécante $L_{\xi'}$ associée à $\xi' = \mathcal{L} - K_Y - \xi$.*

(II) *En particulier le morphisme $A - \{K_Y\} \longrightarrow \mathbb{P}_3$ se prolonge en K_Y.*

Preuve. (I) Soit $\xi' = \mathcal{L} - K_Y - \xi$ et $L_{\xi'}$ la bisécante associée. Elle rencontre L_ξ (cf. proposition 3.1) donc elle rencontre Q en trois points (les deux points de $L_{\xi'} \cap Y$ et le point de $L_{\xi'} \cap L_\xi$). Elle est donc contenue dans Q.

(II) On définit l'image de K_Y de la manière suivante : soit L une bisécante correspondant à K_Y, le plan H_{K_Y} est formé des quadriques Q contenant $Y \cap L$.

Soit $Q \in H_{K_Y}$, nous montrons que les bisécantes correspondant à K_Y (il y en a un $\mathbb{P}_1$) sont alors toutes contenues dans Q. La définition de H_{K_Y} ne dépendra donc pas du choix de L.

On a deux cas, si $\mathcal{L} = 3K_Y$, toutes les bisécantes définies par K_Y se coupent en un même point. Ainsi le raisonnement précédent permet de montrer que si l'une est dans Q elles le sont toutes. Si par contre $\mathcal{L} \neq 3K_Y$, alors les bisécantes définies par K_Y rencontrent toutes la même bisécante L_0 définie par le diviseur $\mathcal{L} - 2K_Y$. Ainsi si une de ces bisécante est dans Q, alors L_0 est contenue dans Q et par le même raisonnement, elles sont toutes contenues dans Q. □

Proposition 3.5. *Le morphisme $A \longrightarrow \mathbb{P}_3$ défini par $\xi \longmapsto H_\xi$ est le morphisme $A \longrightarrow \mathcal{K}$.*

Preuve. Supposons Y lisse et montrons que ce morphisme est invariant par l'involution $\xi \longmapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi = \xi'$. Nous avons vu que si une quadrique Q contenant Y contient L_ξ, alors elle contient $L_{\xi'}$ ce qui prouve que $H_\xi = H_{\xi'}$.

Si Y est réunion de deux courbes elliptiques, on a deux involutions données sur chacune des courbes E_i par $x \longmapsto y$ où y est le troisième point d'intersection de la droite (xP) avec la courbe E_i dans le plan Π_i (P est le point d'intersection des courbes E_i). Si L est une bisécante à Y contenue dans une quadrique Q, la bisécante

L' obtenue par l'involution à partir de L est contenue dans le plan $\Pi = (P, L)$. Mais P est dans le sommet de Q et $L \subset Q$ donc $\Pi \subset Q$ et donc $L' \subset Q$. La courbe C est donc invariante par chacunes des involutions des courbes E_i.

Ce morphisme est bien à valeur dans $\mathcal{K}$ car les plans de quadriques ainsi définis sont tangents à la variété $\mathcal{K}^\vee \subset \mathfrak{C}$ de quadriques singulières. En effet, soit ξ' l'image de ξ par l'involution. On sait que la bisécante $L_{\xi'}$ correspondante est encore dans les quadriques du plan H_ξ. Dans une base ayant pour premier vecteur le point $L_\xi \cap L_{\xi'}$ et pour deuxième respectivement troisième vecteurs un point de L_ξ respectivement de $L_{\xi'}$ (et pour le cas où Y est singulière, pour quatrième respectivement cinquième vecteurs un point du plan contenant E_1 respectivement E_2), les matrices des quadriques s'écrivent (dans chacun des cas) sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & a & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 0 & a & 0 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ x & a_{2,4} & a_{3,4} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ y & a_{2,5} & a_{3,5} & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & y & a_{4,4} & a_{4,5} \\ 0 & x & 0 & a_{4,5} & a_{5,5} \end{pmatrix}.$$

Le lieu défini par le déterminant est singulier au point $x = y = 0$. Ceci montre que l'on a un plan tangent à $\mathcal{K}^\vee$. On vérifie aisément que les fibres sont bien formées par les orbites sous l'involution (respectivement les involutions). L'intersection du plan H_ξ avec le plan tangent à $\mathcal{K}^\vee$ (cf. proposition 3.1) est donnée par l'équation $a = 0$. □

3.3. *La courbe de genre* 5 *revêtement double d'une courbe de genre* 3

Nous décrivons dans cette section une courbe C de genre 5 munie d'une involution sans point fixe.

Nous traitons les cas de $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ et $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ en même temps. Soit Y la courbe de genre 2 précédente (lisse ou réunion de deux courbes elliptiques se coupant en un point) et A la surface abélienne correspondante. Soit $\mathcal{L}$ le diviseur de degré 6 qui permet de plonger Y dans $\mathbb{P}_4$, on choisit Q une quadrique de rang maximal contenant Y (lisse dans le premier cas et de rang 4 dans le second). Elle correspond à un point x du $\mathbb{P}_3^\vee$ contenant $\mathcal{K}^\vee$. Nous construisons ici de manière plongée l'isomorphisme décrit à la proposition 1.1.

Remarque 3.6. Remarquons qu'en fait pour définir C nous n'avons besoin que de la classe d'une quadrique modulo l'action du groupe d'Heisenberg, cependant nous aurons besoin de la quadrique elle même pour obtenir des plongements particuliers de la courbe C.

Soit ξ un élément de A vu comme diviseur de degré 2 sur Y. Il definit (sauf si $\xi = K_Y$) une unique bisécante L_ξ. Nous définissons la courbe C par

$$C = \overline{\{\xi \neq K_Y \ / \ L_\xi \subset Q\}}.$$

Lemme 3.7. *La courbe C est invariante sous l'involution de A.*

Preuve. Dans le cas où Y est lisse, l'involution est donnée par $\xi \longmapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi$. Si $\xi \in C$, alors d'après le lemme 3.4, on a $L_{\xi'} \subset Q$ donc $\xi' \in C$.

De même on a vu dans la preuve de la proposition 3.5 que dans le cas où Y est singulière, si $\xi \in C$, alors $L_\xi \subset Q$ et les images ξ' et ξ'' par les deux involutions vérifient $L_{\xi'} \subset Q$ et $L_{\xi''} \subset Q$. Les points ξ' et ξ'' sont donc dans C. □

REMARQUE 3.8. On a pas donné de condition explicite pour que K_Y soit dans C. Pour le faire, il suffit de prendre L une bisécante correspondant à K_Y et de dire que K_Y est dans C si et seulement si L est contenue dans Q. Le lemme 3.4 nous assure que ceci ne dépend pas du choix de L.

Nous définissons la courbe $\widetilde{X}$ comme l'image de C dans $\mathcal{K}$ et la courbe X comme l'image réciproque de $\widetilde{X}$ dans $\widetilde{\mathcal{K}}$. La courbe $\widetilde{X}$ est l'ensemble des plans de quadriques contenant la quadrique Q et tangents à $\mathcal{K}^\vee$. C'est donc l'intersection du plan de $\mathbb{P}_3$ défini par Q (les quadriques contenant Q) et de la surface de Kummer $\mathcal{K}$. Si Q définit un point de $U(A)$, alors nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION 3.9. *La courbe C est lisse de genre* 5 *et c'est un revêtement double non ramifié de la courbe X qui est lisse de genre* 3.

Preuve. La courbe $\widetilde{X}$ est une section hyperplane de $\mathcal{K}$. La description de ces sections hyperplanes (cf. proposition 1.1) montre que lorsque Y est lisse, la courbe X est plane de degré 4. De plus si Q définit un point de $U(A)$, alors X est lisse et de genre 3. Le revêtement est par ailleurs non ramifié.

Lorsque Y est singulière, alors $\widetilde{X}$ est plane de degré 2. Si Q définit un point de $U(A)$, alors $\widetilde{X}$ est lisse et le morphisme $X \longrightarrow \widetilde{X}$ est ramifié en huit points. La courbe X est donc lisse de genre 3. Le revêtement $C \longrightarrow X$ est par ailleurs non ramifié. □

REMARQUE 3.10. Nous avons vu à la proposition 3.1 qu'une fois le plongement $\mathcal{L}$ fixé, choisir une quadrique contenant Y est équivalent à choisir un point $x \in \mathbb{P}_3^\vee$ l'espace projectif contenant $\mathcal{K}^\vee$ la surface de Kummer duale.

On peut décrire géométriquement sur Q ce que signifie l'appartenance à l'ouvert $U(A)$ (cf. section 1).

Lorsque Y est lisse, si la quadrique Q est lisse également, elle définit un point de $U(A)$ si et seulement si elle ne contient aucune des seize droites $(p_iq_i)_{i\in[1,16]}$ avec $2(p_i+q_i) = \mathcal{L} - K_Y$ (sinon x est dans l'un des seize plans tangents à $\mathcal{K}^\vee$, cf. proposition 3.1).

Lorsque Y est lisse, la quadrique Q peut être singulière. En effet, identifions $A = J(Y)$ avec $\mathrm{Pic}_6(Y)$ en choisissant le diviseur $3K_Y$ pour origine. Soit $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}_6(Y)$ et soit $x \in U(A) \subset \mathbb{P}_3^\vee$ correspondant à la quadrique Q. Si l'image de $\mathcal{L}$ dans $\mathcal{K}$ n'est pas contenue dans le plan $x^\vee \subset \mathbb{P}_3$, la quadrique définie par Q est lisse, sinon elle est singulière. La quadrique est donc singulière exactement si $\mathcal{L} \in C \subset A$. Nous verrons que ces cas donnent des plongements particuliers de C.

Si on suppose la quadrique Q singulière, le point $x \in \mathbb{P}_3^\vee$ correspondant est dans $U(A)$ si et seulement si la courbe Y ne passe pas par le sommet de Q (sinon $x \in \mathcal{K}^\vee$, cf. proposition 3.1) et ne contient aucune des seize droites $(p_iq_i)_{i\in[1,16]}$ avec $2(p_i+q_i) = \mathcal{L} - K_Y$ (sinon x est dans l'un des seize plans tangents à $\mathcal{K}^\vee$).

Enfin, si Y est singulière, notons $(x_i)_{i\in[1,4]}$ et $(y_j)_{j\in[1,4]}$ les points fixes des involutions i_1 et i_2. La quadrique Q définit un point de $U(A)$ si et seulement si Q est de rang 4 et ne contient aucune des seize droites $(x_iy_j)_{(i,j)\in[1,4]\times[1,4]}$.

4. *Caractérisation géométrique de* $\mathfrak{M}_5^i$

Nous montrons dans cette section que les éléments de la jacobienne $J(Y)$ de la courbe Y de genre 2 définissent des plongements particuliers de la courbe C de genre 5. Nous montrons également que l'existence de tels plongement caractérise les courbes de $\mathfrak{M}_5^i$.

4.1. *Des plongements particuliers de la courbe de genre* 5

Nous avons vu que la donnée d'une surface abélienne A et d'un point $\overline{x} \in U(A)/H$ correspond à la donnée d'une courbe C de genre 5 munie d'une involution sans point fixe.

Nous montrons maintenant que la donnée d'un point $x \in U(A)$ relevant $\overline{x}$ et d'un diviseur $\mathcal{L}$ de degré 6 sur Y définit un morphisme particulier de C vers un espace projectif de dimension 3.

Dans $\mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$ le point $x \in U(A)$ correspond à une quadrique Q (lisse ou de rang 4) contenant Y. Nous commençons par décrire la variété $\mathfrak{G}$ des droites contenues dans Q.

Fait 4.1. (I) Si Q est lisse, la variété $\mathfrak{G}$ de ses droites forme un espace projectif de dimension 3 que nous notons $\mathbb{P}(V)$. Il est muni d'une forme symplectique ω. La quadrique Q peut alors être vue comme la variétés des droites de $\mathbb{P}(V)$ isotropes pour ω (ceci vient de l'isomorphisme entre $\mathfrak{so}_5$ et $\mathfrak{sp}_4$, cf. par exemple [**9**]).

(II) Si Q est de rang 4, la variété $\mathfrak{G}$ est une fibration en $\mathbb{P}_2$ au dessus de $\mathbb{P}_1$. Il existe deux contractions naturelles de $\mathfrak{G}$ vers un espace projectif de dimension 3 que nous notons $\mathbb{P}(V_k)$ pour $k \in \{1,2\}$. Elles contractent un $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ vers une droite L_k selon l'une ou l'autre des projections. La quadrique singulière Q est la variété des droites de $\mathbb{P}(V_k)$ qui rencontrent L_k. Ces propriétés viennent de l'identification entre $\mathfrak{so}_6$ et $\mathfrak{sl}_4$ et notamment de l'identification entre l'intersection d'un plan tangent à une quadrique lisse de dimension 4 et l'ensemble des droites de $\mathbb{P}_3$ qui rencontrent une droite fixée (pour une description des droites et des courbes sur cette variété voir [**22**], [**23**] ou [**24**]).

Ce cas apparaît lorsque Y est lisse (cf. la preuve de la proposition 3.1, cas 3(ii)(b), $(a,b) = (2,4)$). On note alors $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif $\mathbb{P}(V_k)$ tel que les (α)-plans rencontrent Y en deux points.

Ce cas apparaît toujours lorsque Y est singulière (la quadrique ne peut par contre pas être de rang 3 si $x \in U(A)$). Les plans Π_1 et Π_2 sont des (α)-plans pour un des $\mathbb{P}(V_k)$ et des (β)-plans pour l'autre. Notons $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif $\mathbb{P}(V_k)$ tel que les plans Π_i soient des (α)-plans.

Dans tous les cas on a donc un morphisme de C vers l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3 : la courbe C est donnée par les $\xi \in A$ tels que la (ou les) bisécantes L_ξ est contenue dans Q. On définit le morphisme $C \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ par $\xi \longmapsto p(L_\xi)$ où p est le morphisme de projection de $\mathfrak{G}$ vers $\mathbb{P}(V)$.

Proposition 4.2. (I) *Lorsque Y et Q sont lisses, la courbe C est plongée dans $\mathbb{P}(V)$, elle est de degré 8 et a une infinité de quadrisécantes.*

(II) *Lorsque Y est lisse mais Q de rang 4, la courbe C est plongée dans $\mathbb{P}(V)$ et est de degré 7. Il existe une droite L telle que la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.*

(III) *Lorsque Y est réunion de deux courbes elliptiques, l'image $\overline{C}$ de la courbe C dans $\mathbb{P}(V)$ est de degré 8 et de genre arithmétique 7. Elle est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques. Elle a deux points doubles situés aux sommets des cônes.*

Preuve. On identifie A au groupe de Picard des diviseurs de degré 2 sur Y avec K_Y comme élément neutre. Le morphisme $C \longrightarrow \mathbb{P}(V)$ est a priori défini lorsque $\xi \neq K_Y$ mais nous pouvons le prolonger, si besoin est, en ce point car C est une courbe lisse. Ce cas n'apparaît que lorsque Y est lisse et Q est singulière.

(I) Supposons Y et Q lisses. Soit $p \in Y$, ce point définit une droite ℓ_p de $\mathbb{P}(V)$. Cette droite est quadrisécante à l'image de C dans $\mathbb{P}(V)$. En effet, on cherche les points $q \in Y$ tels que la droite (pq) est contenue dans Q. Il faut donc que q soit dans l'orthogonal de p pour la quadrique (considérée en tant que forme quadratique). C'est un hyperplan qui rencontre C en 6 points et est tangent à C en p. Il reste donc quatres autres points qui donnent quatres points de l'image de C dans $\mathbb{P}(V)$ qui sont situés sur ℓ_p.

La courbe Y définit dans $\mathbb{P}(V)$ une surface réglée (l'ensemble des droites ℓ_p pour $p \in Y$). L'image de C dans $\mathbb{P}(V)$ est exactement le lieu singulier de cette surface. En effet, soit $\xi \in C$, on a $\xi = p + q$ et l'image de ξ dans $\mathbb{P}(V)$ est à l'intersection des droites ℓ_p et ℓ_q. Réciproquement si un point z de $\mathbb{P}(V)$ est dans le lieu singulier de la surface, alors il est sur deux droites ℓ_p et ℓ_q, la droite de $\mathbb{P}_4$ que z définit est alors contenue dans Q et coupe C en p et q. Le point z est donc dans l'image de C.

Comme lieu singulier, la courbe image de C dans $\mathbb{P}(V)$ est de degré 8 et de genre arithmétique 5 (cf. [**15**]). On a donc bien un plongement qui est de degré 8. La variété des quadrisécantes de C dans ce plongement est la courbe Y.

(II) Notons $\overline{C}$ l'image de C. La quadrique Q est l'ensemble des droites rencontrant une droite L fixée. Soit S la surface réglée définie par Y et C' son lieu singulier. Un point $y \in L$ définit un(α)-plan contenu dans Q. Il rencontre Y en deux points y_1 et y_2 en involution. Ainsi le point y est à l'intersection des droites ℓ_{y_1} et ℓ_{y_2}. La droite L est donc contenue dans C'. Par ailleurs, le même raisonnement que précedement montre que $\overline{C} \subset C'$ et que les points de C' sont donnés par les bisécantes de Y contenues dans Q (la différence par rapport à la situation précédente est le fait que le point $\xi = K_Y$ définit un $\mathbb{P}_1$, qui donnera L, de bisécantes supplémentaires). On a donc $C' = \overline{C} \cup L$. Le genre de $\overline{C}$ est supérieur ou égal à celui de C et par les résultats de [**15**], le genre de C' est 5. On a deux cas : $\overline{C}$ est de genre 6 et ne rencontre pas L ou $\overline{C}$ est de genre 5 et rencontre L en un point. La courbe $\overline{C}$ rencontre L : en effet, le point K_Y est limite de points $\xi \in C$ donc la limite des droites L_ξ est une droite définie par K_Y donc dans $\mathbb{P}(V)$ la limite est un point de L. La courbe $\overline{C}$ est donc de genre 5 et aussi isomorphe à C. La courbe C' est en fait isomorphe à l'image réciproque de $C \subset J(Y)$ dans $\mathrm{Pic}^2(Y)$ (qui est l'éclatement du point K_Y). Remarquons que dans cette situation, les prongements sont obtenus à partir du plongement canonique K_C par projection à partir d'un point de C. Tous les points de C donnent un tel plongement.

(III) En décrivant la quadrique comme la variété des droites de $\mathbb{P}(V)$ qui rencontrent un droite L, on voit que la courbe $\overline{C}$ est sur l'intersection des deux cônes cubiques définis par les courbes E_i. Ces deux cônes ont une droite en commun car les courbes E_i se coupent en un point. La courbe résiduelle doit alors être de degré 8 et de genre arithmétique 7. Elle a deux points doubles. Chaque point double correspond aux points de C de la forme (x, P) et (P, y) (P est le point d'intersection de E_1 et E_2). Les deux points doubles sont donc aux sommets des cônes. □

REMARQUE 4.3. Nous avons vu au fait 4.1 que la quadrique Q est une sous variété de la grassmannienne $\mathbb{G}$ des droites de $\mathbb{P}(V)$: les droites isotropes pour une forme symplectique si Q est lisse et les droites rencontrant une droite L fixée sinon.

La courbe Y contenue dans Q définit alors une surface S réglée de genre 2 et de degré 6 de $\mathbb{P}(V)$. La proposition précédente nous montre que l'image de C dans $\mathbb{P}(V)$ est le lieu singulier de S. Nous retrouvons de manière plongée la correspondance de la proposition 2.6.

REMARQUE 4.4. Lorsque Y est lisse et Q lisse (respectivement de rang 4), la courbe C (respectivement C') plongée dans $\mathbb{P}(V)$ n'est pas contenue dans une surface cubique. En effet, supposons que c'est le cas et soit S une telle surface. Alors S rencontre toutes les quadrisécantes de C (respectivement C') en quatre points donc S contient toutes les quadrisécantes de C (respectivement C'). La surface S contient donc la surface réglée définie par Y, cette dernière est de degré 6, c'est absurde.

4.2. *Réciproque*

Nous avons vu à la proposition 4.2 que les éléments de $A = J(Y)$ (ainsi qu'un relèvement $x \in U(A)$ de $\overline{x} \in U(A)/H$) définissent des plongements particuliers. Nous montrons maintenant que réciproquement toute courbe de degré 5 admettant un tel plongement est munie d'une involution et que le plongement provient d'un élément de $J(Y)$ (et d'un relèvement x de $\overline{x}$).

PROPOSITION 4.5. *Soit $\overline{C}$ une courbe de $\mathbb{P}(V)$ de degré 8 et de genre géométrique 5 qui est liée à une droite par une intersection de deux cônes cubiques et qui a deux points doubles aux sommets des cônes, alors le modèle non singulier C de $\overline{C}$ est dans $\mathfrak{M}_5^{i,d}$.*

Preuve. Soit L la droite commune aux deux cônes cubiques. Soient E_1 et E_2 les deux courbes elliptiques de la grassmannienne qui définissent ces cônes. La droite L correspond au point d'intersection des E_i.

Considérons l'incidence point/plan

$$I = \{(p, h) \in \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}(V)^\vee \ / \ p \in h \text{ et } (h \supset L \text{ ou } p \in L)\}.$$

La variété I paramètre les droites de la quadrique singulière

$$Q = \{l \in \mathbb{G}(2, \mathbb{P}(V)) \ / \ l \cap L \neq \varnothing\}.$$

Voir le fait 4.1(II) et [**23**] ou [**24**] pour plus de détails. La variété I a deux composantes irréductibles. Notons $A = E_1 \times E_2$, pour tout $\xi \in A$, on peut définir un élément L_ξ de I comme étant la droite passant par les deux points de ξ. On a vu que la courbe

$$C = \{\xi \in A \ / \ L_\xi \subset Q\}$$

est alors lisse de genre 5. Elle est contenue dans la composante irréductible de I correspondant à l'inclusion $L \subset h$. La projection de I vers $\mathbb{P}(V)$ envoie C sur $\overline{C}$ et on peut utiliser la construction précédente. □

Proposition 4.6. *Soit C une courbe de genre 5 et de degré 8 de $\mathbb{P}_3$. Supposons que*

(1) *C est lisse, irréductible et non hyperelliptique; ou que*

(2) *C est réunion d'une courbe lisse C' de degré 7 et d'une droite L la rencontrant en un point. Si C admet une infinité de droites quadrisécantes, alors $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$.*

La courbe Y des quadrisécantes de C est lisse de genre 2 et de degré 6 (dans la grassmannienne). La courbe C peut être retrouvée à partir de la courbe Y grâce à la construction précédente.

Preuve. Remarquons que comme C' est lisse de degré 7 et de genre 5, elle est alors non trigonale (cf. [**13**, exemple 6.4.2]).

Nous commençons par remarquer que C ne peut être contenue dans une surface cubique. En effet, soit S une telle surface, la surface S rencontre toutes les quadrisécantes de C en au moins quatre points. Elle contient donc toute les quadrisécantes de C. La surface S contient ainsi la surface réglée S' des quadrisécantes de C. Le surface S' ne peut être un plan. Si la surface S' était une quadrique lisse, alors C serait lisse et hyperelliptique (une quadrique lisse ne contient pas de courbe lisse de degré 7 et de genre 5).

Si S' est un cône, alors C passe par le sommet si et seulement si elle est singulière. Mais alors C' est trigonale (projection par le sommet de degré 3 vers $\mathbb{P}_1$). Elle est donc lisse et ne passe pas par le sommet. La projection à partir de celui-ci donne un morphisme de degré 4 de C vers une conique plane. Les quadrisécantes coupent donc C en exactement quatre points. On relève alors C dans le modèle non singulier de S' (l'éclatement du cône en son sommet qui est une surface rationnelle F_2). On écrit $[C] = af + bh$ où f est la classe d'une fibre et h est la classe d'une section, voir par exemple [**5**]. On a les intersections $f^2 = 0$, $f \cdot h = 1$ et $h^2 = 2$. Comme C ne passe pas par le sommet du cône, sa transformée stricte ne rencontre pas le diviseur exceptionel E dont la classe est $h - 2f$. On a donc $a = [C] \cdot [E] = 0$. Par ailleurs C rencontre les fibres (les quadrisécantes) en exactement quatre points donc $b = [C] \cdot f = 4$. On a donc $[C] = 4h$ ce qui donne par la formule d'adjonction

$$2g(C) - 2 = [C] \cdot ([C] + K) = 4h(4h - 2h) = 16,$$

puis $g(C) = 9$, c'est absurde.

Nous pouvons donc supposer que S est la surface réglée des quadrisécantes. Le théorème de Segre (cf. [**10**, p. 412]) nous dit alors que si σ est le genre de la courbe de base de S et si C (respectivement C') rencontre les règles de S avec multiplicité k, alors on a

$$2\,g(C) - 2 = (k-1)(2\deg(C) - k\deg(S)) + k\,(2\,\sigma - 2)$$

et la même formule avec C'. Le genre σ est 0 ou 1 ce qui donne

$$\begin{aligned} &3k^2 - 17k + 24 = 0 \quad \text{ou} \quad 3k^2 - 19k + 24 = 0 \quad \text{pour } C \text{ lisse},\\ &3k^2 - 15k + 22 = 0 \quad \text{ou} \quad 3k^2 - 17k + 22 = 0 \quad \text{pour } C'. \end{aligned}$$

La seule solution entière pour C lisse est pour $\sigma = 0$, on a alors $k = 3$ ce qui est impossible car les règles sont des quadrisécantes à C donc $k \geqslant 4$. Pour C' la seule solution entière est pour $\sigma = 1$ ce qui donne $k = 2$ ce qui est encore impossible, les règles sont des trisécantes à C'. □

Nous montrons maintenant le suivant.

Lemme 4.7. *La courbe n'a pas de quintisécante et il existe une surface de degré inférieur ou égal à sept singulière le long de C.*

Preuve. On peut mettre une structure de variété sur la famille des quadrisécantes (cf. [**11**] ou [**3**]). L'hypothèse signifie qu'il existe une courbe de la grassmanienne des droites de $\mathbb{P}_3$ correspondant à des quadrisécantes de C. La courbe C n'a pas de 5-sécante. En effet, si D est une 5-sécante, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-Z) \longrightarrow \mathcal{O}_{C\cup D} \longrightarrow \mathcal{O}_D \longrightarrow 0$$

où $Z = C \cap D$. Il en résulte la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_C(3h - Z)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_{C\cup D}(3)) \longrightarrow H^0(\mathcal{O}_D(3)) \longrightarrow 0,$$

où h est la classe d'une section plane de C et donc que $H^0(\mathcal{O}_{C\cup D}(3)) = 19$. On en déduit que $C \cup D$ est sur une surface cubique ce qui est absurde.

Il existe une surface de degré inférieur ou égal à 7 singulière le long de C. En effet, comme C n'est pas sur une cubique, on a $h^1\mathcal{I}_C(3) = 0$. De plus $h^2\mathcal{I}_C(2) = h^1\mathcal{O}_C(2) = 0$ et $h^3\mathcal{I}_C(1) = 0$. Le faisceau $\mathcal{I}_C$ est donc 3-régulier ce qui impose que $\mathcal{I}_C(4)$ est engendré par ses sections (cf. [**17**]). On a donc une surjection $\mathcal{O}_C(3) \longrightarrow (\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)$ et comme $h^1\mathcal{O}_C(3) = 0$, on en déduit que $h^1((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = 0$ et donc $h^0((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = \chi((\mathcal{I}_C/\mathcal{I}_C^2)(7)) = 64$. On a donc $h^0(\mathcal{I}_C^2(7)) \geqslant 4$. Il existe donc une surface de degré inférieur ou égal à 7 singulière le long de C. Cette surface contient toutes les quadrisécantes de C. □

Lemme 4.8. *Si deux quadrisécantes l et l' de C se coupent en un point p alors p appartient à C. Les droites l et l' et la tangente à C en p ne sont pas coplanaires.*

Preuve. Si $p \notin C$, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C(-(C \cap (l \cup l')) \longrightarrow \mathcal{O}_{C\cup l\cup l'} \longrightarrow \mathcal{O}_{l\cup l'} \longrightarrow 0.$$

Après tensorisation par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(3)$, on obtient $h^0(\mathcal{O}_C(3h-p_1-\ldots-p_4-q_1\ldots-q_4) = 12$ et $h^0(\mathcal{O}_{l\cup l'}(3)) = 7$. Il en résulte que $h^0(\mathcal{O}_{C\cup l\cup l'}(3)) = 19$ donc $C\cup l\cup l'$ est sur une surface cubique ce qui est absurde. On a ici noté $l \cdot C = p_1 + p_2 + p_3 + p_4$ et $l' \cdot C = q_1 + q_2 + q_3 + q_4$.

Si le plan engendré par l et l' est tangent à C en p, toute surface contenant l et l' est tangente à C en p et on conclut comme précédemment avec $l\cdot C = p+p_1+p_2+p_3$ et $l'\cdot C = p+q_1+q_2+q_3$ et en considérant $h^0(\mathcal{O}_C(3h-2p-p_1-p_2-p_3-q_1-q_2-q_3))$. On peut, de la même manière, montrer que par un point de C il ne passe pas trois quadrisécantes. □

Soit $\bar{S}$ la surface réglée engendrée par la courbe Y des quadrisécantes.

LEMME 4.9. *La courbe C est le lieu singulier de la surface $\bar{S}$ qui est de degré 6. La courbe Y est lisse et de genre 2.*

Preuve. Le degré de $\bar{S}$ est inférieur ou égal à 7 d'après le lemme 4.7 et est supérieur ou égal à quatre. Soit Y la courbe des quadrisécantes. Elle est irréductible sinon l'une de ses composantes donne une surface de degré inférieur à 3 contenant C. Remarquons que si Y est plane alors $\bar{S}$ est un cône et soit x son sommet. Si C est lisse et $x \notin C$, alors la projection à partir de x est un morphisme de degré 4 (car les quadrisécantes passent par x), son image est donc de degré 2 et C est sur un cône, c'est impossible. Si $x \in C$ et C lisse, alors le morphisme de projection doit être degré au moins 3 et diviser 7, il est donc de degré 7, son image est alors de degré 1 et C serait plane, c'est absurde. Si C n'est pas lisse et $x \notin C'$ alors la projection de C' à partir de x est de degré au moins 3 (car les droites sont au moins trisécantes), elle est donc de degré 7 ce qui impose que C' est plane, c'est absurde. Si $x \in C'$, la projection est encore au moins de degré 3. Si elle est de degré 3 alors on a un $\mathbf{g}_3^1$ sur C', c'est absurde car C' n'est pas trigonale. Elle doit donc être de degré 6 et C' plane, c'est encore impossible. Ainsi la courbe Y ne peut être plane.

Le lieu singulier de $\bar{S}$ est contenu dans C d'après le lemme précedent, il est donc de degré 0, 1, 7 ou 8. Soit n le degré de Y et p son genre géométrique. Les résultats de [**15**] nous disent que le lieu singulier de $\bar{S}$ est alors de degré $(n-1)(n-2)/2-p$ qui vaut $3-p$, $6-p$, $10-p$ ou $15-p$ selon les valeurs de $n \in [4,7]$. De plus ce degré doit appartenir à $\{0,1,7,8\}$. Mais comme Y n'est pas contenue dans un plan et est irréductible la formule de Castelnuovo (cf. [**3**, p. 116]) nous donne une borne sur p qui est 1, 2, 4 ou 6 selon les valeurs de n. Ainsi le degré du lieu singulier est contenu dans $[2,3]$, $[4,6]$, $[6,10]$ ou $[9,15]$ et dans $\{0,1,7,8\}$. Les seules valeurs possibles sont 7 ou 8 avec $n=6$ et $p=3$ ou 2.

Soit $\widetilde{Y}$ le modèle lisse de Y. Le lieu singulier de $\bar{S}$ peut être vu comme une courbe dans $\mathrm{Div}_2(\widetilde{Y})$ dont le genre arithmétique est P avec $2P-2=(n-5)(n+2p-2)$ (cf. [**1**]). Ceci nous donne $P=6$ si $p=3$ ou $P=5$ si $p=2$. Le premier cas est impossible. Ainsi Y est de degré 6 et de genre géométrique 2. On peut calculer (cf. [**15**]) que la surface n'a pas de point triple.

Il reste à montrer que Y est lisse. Si Y n'est pas lisse, alors $p_a(Y) \geqslant 3$ et Y est contenue dans l'intersection de la grassmannienne avec un espace projectif de dimension 3. Si cette intersection est lisse c'est une quadrique formée des droites rencontrant deux droites L_1 et L_2. Les deux droites sont alors dans le lieu singulier, c'est impossible. Si l'intersection est singulière, on peut supposer que c'est un cône (car Y n'est pas plane). Mais alors un calcul dans la surface F_2 modèle non singulier de ce cône montre que le genre géométrique de Y doit être 3 ou 4. C'est impossible donc Y est lisse. □

Preuve de la proposition 4.6. Notons $\mathbb{G}$ la grasmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$, on voit $\mathbb{G}$ comme une quadrique de $\mathbb{P}_5$ par le plongement de Plücker. Notons E la restriction du quotient tautologique de $\mathbb{G}$ à Y. Le modèle non singulier de $\bar{S}$ est $\mathbb{P}_Y(E)$.

Soit $\mathcal{L} = \Lambda^2 E = \mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)|_C$, c'est un fibré de degré 6. L'espace $\mathbb{P}_4 = \mathbb{P}(H^0\mathcal{L})$ est un hyperplan de $\mathbb{P}_5$. La courbe Y est contenue dans la quadrique Q découpée par $\mathbb{G}$ dans $\mathbb{P}_4$.

La courbe C est isomorphe à la courbe suivante de Y_2 le carré symétrique de Y.

$$\tilde{C} = \{(x,y) \in Y_2 \ / \ (xy) \subset Q\}.$$

En effet, on définit un morphisme $\tilde{C} \longrightarrow C$ par $(x,y) \longmapsto \ell_x \cap \ell_y$ où ℓ_x (respectivement ℓ_y) désigne la droite de $\mathbb{P}_3$ correspondant à x (respectivement y). Ce morphisme est bien défini car si on a $(xy) \subset Q$, alors les droites ℓ_x et ℓ_y se rencontrent et on a (d'après le lemme 4.8) un point de C. On définit une réciproque $C \longrightarrow \tilde{C}$ par $z \longmapsto (x,y)$ où x et y sont les deux quadrisécantes passant par z (il y en a exactement deux car la surface n'a pas de point triple).

Nous sommes dans la situation de la proposition 4.2. En particulier on a une involution i sur $\tilde{C}$ (vue dans $\mathrm{Pic}_2(Y)$) donnée par $\xi \longmapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi$. Elle est donnée sur C de la manière suivante : soit $z \in C$, il existe deux quadrisécantes L_1 et L_2 passant par z. Soit alors H le plan engendré par ces quadrisécantes, le plan H rencontre C en huit points dont sept sont sur $L_1 \cup L_2$. Le huitième point est $i(z)$. L'involution est sans point fixe. En effet, si $z = i(z)$, ceci signifie que H est tangent à C en z et H contient L_1 et L_2. C'est exclu par le lemme 4.8. $\square$

Remarque 4.10. Dans [**16**], Mukai donne une version du lemme 3.12.

4.3. *Caractérisation de $\mathfrak{M}_5^i$*

Ces résultats nous permettent de donner une nouvelle caractérisation géométrique des courbes de genre 5 revêtement double d'une courbe de genre 3.

Théorème 4.11. *Soit C une courbe lisse de genre 5.*

(I) (i) *Première caractérisation : On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement $\mathcal{M}$ de degré 8 de C dans $\mathbb{P}_3$ pour lequel la courbe C a une infinité de quadrisécantes.*

(ii) *Seconde caractérisarion : On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,i}$ si et seulement s'il existe un plongement $\mathcal{M}'$ de degré 7 de C dans $\mathbb{P}_3$ et une droite L rencontrant C en un point pour lesquels la courbe $C \cup L$ a une infinité de quadrisécantes.*

Dans cette situation, la courbe Y des quadrisécantes est la même quelque soit le plongement. Elle est lisse de genre 2 et telle que $J(Y) = \mathrm{Prym}(C)$ et est plongée dans $\mathbb{P}_4$ par un diviseur $\mathcal{L}$ de degré 6.

Notons $\mathfrak{J}_0(C)$ les diviseurs $\mathcal{M}$ de degré 8 du premier type, $\mathfrak{J}_1(C)$ les diviseurs $\mathcal{M}' + p$ où $p = C \cap L$ et $\mathcal{M}'$ est de degré 7 du second type. La réunion $\mathfrak{J}(C)$ de ces ensembles est isomorphe à $J(Y)$. Le morphisme $\mathfrak{J}(C) \longrightarrow J(Y)$ défini par $\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}$ est la multiplication par 2 dans $J(Y)$, c'est donc un fibré principal homogène de groupe H.

(II) *On a $C \in \mathfrak{M}_5^{i,d}$ si et seulement s'il existe un morphisme de C dans $\mathbb{P}_3$ tel que son image $\overline{C}$ est liée à une droite L par une intersection de deux cônes cubiques, de degré 8 et a deux points doubles aux sommets des cônes.*

Dans cette situation, la courbe Y des quadrisécantes est la même quelque soit le plongement. Elle est de genre 2 réunion des deux courbes elliptiques E_1 et E_2 définissant les cônes cubiques. Elle est plongée dans $\mathbb{P}_4$ par un diviseur $\mathcal{L}$ de degré 6.

L'ensemble $\mathfrak{J}(C)$ des diviseurs de degré 8 de C qui définissent de tels morphismes est isomorphe à $E_1 \times E_2$. Le morphisme $\mathfrak{J}(C) \longrightarrow E_1 \times E_2$ défini par $\mathcal{M} \longmapsto \mathcal{L}$ est un fibré principal homogène de groupe H.

Preuve. Les caractérisations de $\mathfrak{M}_5^{i,i}$ et $\mathfrak{M}_5^{i,d}$ découlent des propositions 4.2, 4.5 et 4.6. Nous décrivons les ensembles $\mathfrak{J}$ de plongements.

(I) Fixons une courbe Y lisse de genre 2 et notons A sa jacobienne et $U(A)$ l'ouvert de $\mathbb{P}_3^\vee$ défini précédement. On a vu l'isomorphisme $\mathrm{Prym}^{-1}(A) \simeq U(A)/H$.

Par ailleurs on peut considérer les choses de manière plongée : notons $\mathfrak{P}$ l'ensemble des couples $(C, \mathcal{M}) \in \mathrm{Prym}^{-1}(A) \times \mathfrak{J}(C)$ et $\mathfrak{P}'$ l'ensemble des couples $(x, \mathcal{L}) \in U(A) \times J(Y)$. Les propositions 4.2, 4.5 et 4.6 montrent que ces ensembles sont en bijection. L'ensemble $\mathfrak{P}'$ est isomorphe à l'ouvert de l'espace de modules $M_Y(2,6)$ (des fibrés vectoriels de rang 2 et degré 6 sur Y) correspondant aux surfaces réglées admissibles.

Ils sont munis d'une application vers $\mathrm{Prym}^{-1}(A) \simeq U(A)/H$ dont la fibre est $\mathfrak{J}(C)$ pour le premier qui s'identifie donc à la fibre du second. Le morphisme $\mathfrak{P}' \longrightarrow U(A)/H$ est le morphisme $M_Y(2,6) \longrightarrow \mathrm{Reg}_a(Y)$. Nous avons vu que sa fibre $\mathfrak{J}$ s'identifie à $J(Y)$ et que le morphisme naturel $\mathfrak{J} \simeq J(Y) \longrightarrow J(Y)$ est la multiplication par 2 dans $J(Y)$.

Nous allons identifier $\mathfrak{J}(C)$ dans $\mathrm{Pic}_8(C)$ vu comme variété abélienne d'élément unité K_C. Nous commençons par montrer que $\mathfrak{J}(C)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(1+i)$, c'est-à-dire que si on a $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}(C)$ alors $i(\mathcal{M}) = 2K_C - \mathcal{M}$. Soit donc $\mathcal{M} \in \mathfrak{J}(C)$ qui nous donne un plongement de C avec une infinité de quadrisécantes. Soit x un point de C. Par ce point il passe deux quadrisécantes, disons L et L'. Elle définissent des $\mathbf{g}_4^1$ notés D_L et $D_{L'}$ sur C en considérant les intersection résiduelles avec C des plans qui les contiennent. Soit alors H le plan contenant L et L' (les droites se coupent en x). Il rencontre C en huit points dont sept sont sur $L \cup L'$ et le huitième est $i(x)$. On a donc

$$\mathcal{M} = D_L + D_{L'} + i(x) - x.$$

On applique alors l'involution i en remarquant que sur les $\mathbf{g}_4^1$ elle est donnée par $D_L \longmapsto K_C - D_L$. On a donc

$$i(\mathcal{M}) = 2K_C - D_L - D_{L'} - i(x) + x = 2K_C - \mathcal{M}.$$

Nous savons donc que $\mathfrak{J}(C) \simeq J(Y)$ et est en particulier connexe et que $\mathfrak{J}(C) \subset \mathrm{Ker}(1+i)$. C'est donc une composante connexe de $\mathrm{Ker}(1+i)$. Nous allons identifier laquelle en considérant le sous-ensemble de plongements $\mathfrak{J}_1(C)$.

Remarquons enfin que l'ensemble $\mathfrak{J}_1(C)$ des diviseurs du second type est isomorphe à la courbe C : ce sont les projections du plongement canonique de C par un point de C. L'ensemble $\mathfrak{J}_1$ est donc l'image du plongement de C dans $J(Y)$. Cependant, un tel plongement peut également provenir d'un autre diviseur $\mathcal{M}$ de degré 8 sur C. En effet, pour tout couple de points (p,q) de C, le diviseur $\mathcal{M} = K_C + p - q$ a p pour point base. Le plongement associé est la projection du plongement canonique à partir du point q. Ainsi tous les fibrés de la forme $\mathcal{M} = K_C + p - q$ peuvent apparaître a priori dans $\mathfrak{J}_1(C)$. Cependant, on a vu que ces plongement sont dans $\mathrm{Ker}(1+i)$ donc il faut que $i(\mathcal{M}) = 2K_C - \mathcal{M}$ ce qui nous donne $K_C + i(p) - i(q) = K_C + q - p$ et en particulier $i(p) + p = q + i(q)$ ce qui n'est possible (car C n'est pas hyperelliptique) que si $q = p$ ou $q = i(p)$. Les plongements qui nous intéressent sont donc de la forme $\mathcal{M} = K_C + p - i(p)$.

(II) La sous-variété $\mathfrak{J}(C)$ des plongements est donc la composante connexe de $\mathrm{Ker}(1+i)$ contenant le plongement $p \longmapsto K_C + p - i(p)$ de la courbe C dans $\mathrm{Pic}_8(C)$. Le même raisonnement donne le cas (II). □

Remarque 4.12. (I) Nous montrons dans cette remarque, en utilisant les plongements particuliers décrits ci-dessus, deux résultats que nous avons utilisés à la section 2.

Soit S la surface réglée au-dessus de Y définie à partir de C. Si un plongement général $C \in \mathbb{P}_3$ est fixé, cette surface est simplement la surface des quadrisécantes à la courbe C. Elle est réglée au dessus de Y. On peut la voir simplement grâce au plongement : Y est contenue dans $\mathbb{G}$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}_3$ et S est la surface définie par le quotient tautologique sur $\mathbb{G}$.

Un point x de C définit une section s_x de cette surface : soit $y \in Y$ qui définit une droite L_y de $\mathbb{P}_3$, on peut alors regarder le plan $H_{L_y}(x)$ contenant x et L_y. Cependant $\mathbb{P}_3$ est muni d'une forme symplectique et l'orthogonal du plan est un point de L_y. Cette section est celle décrite abstraitement à la section 2.

Nous voulons montrer que deux points distincts définissent deux sections distinctes et que la self-intersection d'une section ainsi définie est 2.

Supposons que deux points x et x' de C définissent la même section, alors pour toute quadrisécante L à C, les plans $H_L(x)$ et $H_L(x')$ sont égaux. Ainsi toute quadrisécante L de C rencontre la droite (xx'). La courbe Y serait alors tracée sur une quadrique singulière ce qui n'est pas le cas si le plongement est général.

Enfin, montrons que les self-intersections valent 2. Pour celà nous remarquons que le fibré tangent relatif est donné par la restriction à la surface S (vu comme surface de l'incidence points/droites) du fibré $p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(2) \otimes q^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(-1)$ où p est la projection sur $\mathbb{P}_3$ et q la projection sur $\mathbb{G}$.

Soit s_x la section définie par $x \in C$. Le degré de $s_x^*(q^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)|_S)$ est 6 car Y est plongée en degré 6. Il nous faut calculer le degré de $s_x^*(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)|_S)$. Il est donné par le degré de la courbe Z des plans passant par x et une quadrisécante à C. Si on note ℓ_x et ℓ'_x des deux points de Y correspondant aux quadrisécantes passant par x, la courbe Z est l'image de Y par la projection de centre la droite $(\ell_x\ell'_x)$. Elle est de degré 4 ce qui prouve que $s_x^*T_r$ est de degré 2.

(II) Nous pouvons même identifier le diviseur $s_x^*T_r$: considérons l'hyperplan de $\mathbb{G}$ tangent à Y en ℓ_x et ℓ'_x. Il recoupe Y en deux points de telle sorte que le diviseur α formé par ces points est $\alpha = \mathcal{L} - 2(\ell_x + \ell'_x)$. Le diviseur $\alpha + \ell_x + \ell'_x$ est alors linéairement équivalent à $s_x^*(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)|_S)$. Prenons maintenant un autre hyperplan passant par ℓ_x et ℓ'_x, il coupe Y en quatre autres points qui forment un diviseur D tel que $D = \mathcal{L} - (\ell_x + \ell'_x)$ et D est linéairement équivalent à $s_x^*(p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}_3}(1)|_S)$. Comme $s_x^*(q^*\mathcal{O}_{\mathbb{G}}(1)|_S)$ est linéairement équivalent à $\mathcal{L}$, on voit que $s_x^*T_r = \alpha + \ell_x + \ell'_x + D - \mathcal{L} = \alpha + \ell_x + \ell'_x + \mathcal{L} - (\ell_x + \ell'_x) - \mathcal{L}$ et donc $s_x^*T_r = \alpha$.

(III) Le plongement de la courbe C dans $\mathrm{Pic}_2(Y)$ défini à la sous-section 3.3 grâce à une quadrique contenant Y et celui défini à la section 2 grâce aux sections de la surface réglée sont donc différents.

En effet, pour le premier (cas de la quadrique), il est donné par : à un point $x \in C$ on associe le diviseur $\xi = \ell_x + \ell'_x$ défini par les deux quadrisécantes ℓ_x et ℓ'_x à C passant par x. L'involution sur C est alors donnée par $\xi \longmapsto \mathcal{L} - K_Y - \xi$, l'élément neutre n'est défini qu'à une demi-période près par une racine de $\mathcal{L} - K_Y$.

Pour le second, on vient de voir qu'à x on associe le diviseur $\alpha = \mathcal{L} - 2(\ell_x + \ell'_x)$ c'est-à-dire $\alpha = \mathcal{L} - 2\xi$. L'involution est alors donnée par $\alpha \longmapsto 2K_Y - \alpha$ et l'élément neutre est K_Y.

Le second plongement ne fait pas intervenir le diviseur $\mathcal{L}$ (cf. la construction de la section 2), c'est juste la translation par K_Y du plongement de C dans une composante connexe de $\mathrm{Ker}(1+i) \subset J(C)$ donné par $x \longmapsto x - i(x)$.

Le premier dépend par contre de $\mathcal{L}$ (par exemple pour l'involution), pour le retrouver à partir du second, il faut fixer $\mathcal{L}$ et même un peu plus : une demi-période sur Y. Le choix de $\mathcal{L}$ et de cette racine correspond au choix du plongement (élément de $\mathfrak{J}(C)$) de C dans $\mathbb{P}_3$.

Remerciements. Les auteurs remercient le rapporteur pour leur avoir signalé la référence [**25**] qui a donné lieu à la remarque 0.2. Le troisième auteur remercie Atanas Iliev pour les nombreuses références qu'il lui a communiquées.

Références

1. J. d'Almeida, 'Lieu singulier d'une surface réglée', *Bull. Soc. Math. France* 118 (1990).
2. J. d'Almeida, L. Gruson and N. Perrin, 'Courbes de genre 5 munies d'une involution sans point fixe', Prépublication, math.AG/0307005.
3. E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths and J. Harris, *Geometry of algebraic curves – Vol.* I, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 267 (Springer, New York, 1985).
4. Arnaud Beauville, 'Prym varieties and the Schottky problem', *Invent. Math.* 41 (1977).
5. Arnaud Beauville, 'Surfaces algébriques complexes', *Astérisque* 54 (Societé Mathématique de France, Paris, 1978).
6. R. Donagi, 'The tetragonal construction', *Bull. Amer. Math. Soc.* (*N.S.*) 4 (1981).
7. R. Donagi, 'The fibers of the Prym map', *Curves, Jacobians, and Abelian Varieties* (*Amherst, MA*, 1990), Contemporary Mathematics 136 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1992).
8. R. Donagi and R. Smith, 'The structure of the Prym map', *Acta Math.* 146 (1981).
9. W. Fulton and J. Harris, *Representation theory. A first course*, Graduate Texts in Mathematics 129 (Springer, New York, 1991).
10. L. Gruson and C. Peskine, 'Genre des courbes de l'espace projectif II', *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) 15 (1982).
11. L. Gruson and C. Peskine, 'Courbes de l'espace projectif : variétés de sécantes', *Enumerative geometry and classical algebraic geometry*, Progress in Mathematics (Birkhäuser, 1982) 1–32.
12. L. Gruson, R. Lazarsfeld and C. Peskine, 'On a theorem of Castelnuovo, and the equations defining space curves', *Invent. Math.* 72 (1983).
13. R. Hartshorne, *Algebraic geometry*, Graduate Texts in Mathematics 52 (Springer, 1977).
14. R. W. H. T. Hudson, *Kummer's quartic surface*, Cambridge Mathematical Library (Cambridge University Press, Cambridge, 1990) (revised reprint of 1905 edition).
15. S. L. Kleiman, 'The enumerative theory of singularities', *Real and complex singularities. Proceedings of the Ninth Nordic Summer School/NAVF Symposium on Mathematics, Oslo*, 1976 (Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977) 297–396.
16. S. Mukai, 'Curves and Grassmannians', *Algebraic geometry and related topics. Proceedings of the International Symposium, Inchoen, Republic of Korea* (1992).
17. D. Mumford, *Lectures on curves on an algebraic surface*, Annals of Mathematics Studies 59 (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1966) (with a section by G. M. Bergman).
18. D. Mumford, 'On the equations defining abelian varieties I', *Invent. Math.* 1 (1966).
19. D. Mumford, *Prym varieties.* I : *Contributions to analysis* (Academic Press, New York, 1974) 325–350.
20. D. Mumford, *Tata lectures on theta* III, Progress in Mathematics 97 (Birkhäuser, Boston, MA, 1991).
21. M. S. Narasimhan and S. Ramanan, 'Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface', *Ann. of Math.* (2) 89 (1969).
22. N. Perrin, 'Lieu singulier des surfaces rationnelles réglées', *Math. Z.* 241 (2002) 375–396.
23. N. Perrin, 'Rational curves on homogeneous cones', *Doc. Math.* 9 (2004) 623–637.
24. N. Perrin, 'Rational curves on minuscule Schubert varieties', *J. Algebra*, to appear.

25. M. Teixidor i Bigas, 'For which Jacobi varieties is Sing Θ reducible?', *J. Reine Angew. Math.* 354 (1984) 141–149.
26. A. Verra, 'The fibre of the Prym map in genus three', *Math. Ann.* 276 (1987).

Jean d'Almeida
Université des Sciences et Technologies de Lille
AGAT
F-59665 Villeneuve d'Ascq Cedex
France

Laurent Gruson
Université de Versailles
45 avenue des États-Unis
F-78035 Versailles
France

Nicolas Perrin
Institut de Mathématiques de Jussieu
175 rue du Chevaleret
F-75013 Paris
France