C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 217–220, 2000
Géométrie algébrique/*Algebraic Geometry*

Une composante du bord des instantons de degré 3

Nicolas PERRIN

École normale supérieure, 6, rue Einstein, 92160 Antony, France
Courriel : nperrin@clipper.ens.fr

(Reçu le 2 juillet 1999, accepté après révision le 22 novembre 1999)

Résumé. Dans leur article [1], L. Gruson et M. Skiti ont décrit une application birationnelle de la variété $\mathbf{I}_3$ des instantons de degré 3 vers les réseaux de quadriques de $\check{\mathbf{P}}_3$. Ils font ainsi apparaître deux composantes du bord de $\mathbf{I}_3$ associées l'une au diviseur des réseaux contenant une quadrique de $\check{\mathbf{P}}_3$ dégénérée en deux plans, et l'autre au diviseur des réseaux de Lüroth. Dans cette Note, on décrit une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$ comme le diviseur exceptionnel de l'éclatement du fermé des réseaux de quadriques formé par les quadriques de rang 3. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

A component of the boundary of mathematical instantons of degree 3

Abstract. *In their article* [1]*, L. Gruson and M. Skiti have constructed a birational map from the variety* $\mathbf{I}_3$ *of mathematical instantons of degree* 3 *to the variety of nets of quadrics in* $\check{\mathbf{P}}_3$*. They describe by this way two irreducible components of the boundary of* $\mathbf{I}_3$ *associated to the divisor of nets which contain a two-plane degenerated quadric and the divisor of Lüroth nets. In this Note we describe an irreducible component of the boundary of* $\mathbf{I}_3$ *as the exceptional divisor of the blowing-up of the closed set of nets of quadrics of rank* 3. © 2000 Académie des sciences/Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS

1. Introduction

Soit V un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbf{C}$, on note $\mathbf{P}^3$ l'espace projectif $\mathbf{P}(V)$. Un *instanton* de degré n est un élément de $\mathrm{M}_{\mathbf{P}^3}(0,n,0)$ (l'espace des modules des faisceaux semi-stables sans torsion de classes de Chern $(0,n,0)$) qui est localement libre, stable et qui vérifie la propriété cohomologique $\mathrm{h}^1E(-2)=0$. On connaît toutes les composantes irréductibles du bord des instantons de degrés 1 et 2 (*voir* par exemple [3] pour le degré 1 et [2] pour le degré 2). On se propose ici d'étudier une composante irréductible du bord de la variété $\mathbf{I}_3$ des instantons de degré 3.

L. Gruson et M. Skiti ont montré dans [1] que la variété $\mathbf{I}_3$ des instantons de degré 3 est birationnelle à la variété $\mathbf{R}=\mathrm{G}(3,\mathrm{S}^2\check{V})$ (qui paramétrise les sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathrm{S}^2\check{V}$) des réseaux de quadriques de $\check{\mathbf{P}}_3$. L'ouvert de $\mathbf{I}_3$ formé par les instantons sans droite trisauteuse s'envoie birationnellement sur un ouvert $\mathbf{R}_4$ de $\mathbf{R}$ formé par les réseaux R de quadriques tels que l'application $R\otimes V\to\check{V}$ soit de rang 4.

Cette description leur a permis d'identifier deux composantes irréductibles du bord de $\mathbf{I}_3$ données par les hypersurfaces $\mathbf{R}'$ (resp. $\mathbf{R}''$) des réseaux contenant une quadrique décomposée en deux plans (resp.

Note présentée par Michel RAYNAUD.

des réseaux de Lüroth). On décrit ici une troisième composante du bord de $\mathbf{I}_3$. L'idée consiste à éclater certaines sous-variétés de $\mathbf{R}$ afin de pouvoir prolonger le morphisme des réseaux vers les faisceaux. On considère ainsi la sous-variété $\mathbf{F}$ de la Grassmannienne $\mathrm{Grass}(4, \mathcal{R}\otimes V)$ des quotients de rang 4 de $\mathcal{R}\otimes V$ au-dessus de $\mathbf{R}$ (où $\mathcal{R}$ est le sous-fibré tautologique de $\mathbf{R}$) qui vérifie le fait que $\mathcal{R}\otimes V \to \mathcal{W}$ factorise l'application $\mathcal{R}\otimes V \to \mathcal{O}\otimes \check{V}$ (on a ici noté $\mathcal{W}$ le quotient tautologique de $\mathrm{Grass}(4, \mathcal{R}\otimes V)$). Remarquons que $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{R}$ est un isomorphisme au-dessus de $\mathbf{R}_4$. Notons $\mathbf{R}_i$ le localement fermé des réseaux tels que la flèche $\mathcal{R}\otimes V \xrightarrow{\psi} \check{V}$ est de rang i et posons $\mathbf{F}_i = \pi^{-1}(\mathbf{R}_i)$.

Remarque 1. – Le schéma $\mathbf{F}_3$ est irréductible et réduit. En effet, on a un morphisme de $\mathbf{F}_3$ vers $\mathrm{G}(3, \check{V})$ qui a un quotient W de rang 4 de $\mathcal{R}\otimes V$ associe l'image de la composée $\mathcal{R}\otimes V \to W \to \check{V}$ qui est de dimension 3 car on est dans $\mathbf{F}_3$. Mais alors la fibre de ce morphisme au-dessus d'un sous-espace K de dimension 3 de $\check{V}$ est donnée par $\mathrm{G}(3, \mathrm{S}^2K \oplus \check{V})$, donc on voit que $\mathbf{F}_3$ est donné par $\mathrm{G}(3, \mathrm{S}^2\mathcal{K} \oplus \check{V})$, où $\mathcal{K}$ est le sous-fibré tautologique de $\mathrm{G}(3, \check{V})$. Grâce à cette description, on sait que $\mathbf{F}_3$ est irréductible et réduit.

PROPOSITION 1. – *Au voisinage de* $\mathbf{F}_3$*, le morphisme* $\pi : \mathbf{F} \to \mathbf{R}$ *est l'éclatement de* $\mathbf{R}_3$*.*

Démonstration. – Prenons un réseau R de $\mathbf{R}_3$ et plaçons-nous sur un ouvert affine de $\mathbf{R}$ contenant ce point. On sait alors qu'il existe un mineur 3×3 de $R\otimes V \to \check{V}$ qui est inversible. Ceci signifie que l'on a un sous-fibré Q de rang 3 de $\mathcal{R}\otimes V$ et un sous-fibré K de $\check{V}$ tels que la restriction de ψ à Q est un isomorphisme sur K. On peut alors se placer sur un ouvert affine de $\mathbf{R}$ d'anneau A tel que l'application $Q\otimes A \xrightarrow{\psi} K\otimes A$ est inversible en tout point de $\mathrm{Spec}(A)$. On a alors le diagramme suivant de A-modules :

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & K \arrow[d] \\
\mathcal{R}\otimes V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \mathcal{O}\otimes\check{V} \arrow[d] \\
A^9 \arrow[r, "\varphi"] & A
\end{tikzcd}$$

Le fermé $\mathbf{R}_3$ dans l'ouvert affine $\mathrm{Spec}(A)$ est donné par le $0^{\text{ième}}$ idéal de Fitting de φ, c'est-à-dire par l'annulation de φ. L'éclatement de ce lieu singulier est alors un schéma X au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$ solution du problème universel suivant : si X' est un schéma muni d'un morphisme f vers $\mathrm{Spec}(A)$ tel que l'image de $f^*\varphi : f^*(A^9) \to f^*(A)$ est un idéal inversible alors le morphisme de X vers $\mathrm{Spec}(A)$ se factorise par f.

Il reste à montrer que $\mathbf{F}$ au-dessus de cet ouvert est également solution de ce problème universel. Or, au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$, le schéma $\mathbf{F}$ vérifie la propriété universelle suivante : si X' est un schéma muni d'un morphisme f vers $\mathrm{Spec}(A)$ et muni d'un module W localement libre de rang 4 tel que $f^*\psi : f^*(\mathcal{R}\otimes V) \to f^*(\mathcal{O}\otimes\check{V})$ se factorise par W, le morphisme de $\mathbf{F}$ vers $\mathrm{Spec}(A)$ se factorise par f. Soit un schéma X' muni d'un morphisme f vers $\mathrm{Spec}(A)$ et tel que l'image de $f^*\varphi : f^*(A^9) \to f^*(A)$ soit un idéal inversible I, on construit alors un module localement libre de rang quatre W tel que $f^*\psi$ se factorise par W. En effet, il suffit de poser $W = f^*Q \oplus I$ qui est localement libre de rang 4 et on a une application $f^*(\mathcal{R}\otimes V) \to W$ qui factorise le morphisme $f^*\psi$. La propriété universelle de $\mathbf{F}$ au-dessus de $\mathrm{Spec}(A)$ nous permet alors de dire que l'on a une application de $\mathbf{F}$ vers X', ce qui nous donne le résultat. $\square$

Remarque 2. – M. Skiti, dans un article en préparation montre qu'au voisinage de $\mathbf{F}_2$, le morphisme π est l'éclatement de $\mathbf{R}_2$. Il en déduit une description de la sous-variété (notée $\mathbf{I}_3^1$) de $\mathbf{I}_3$ des instantons ayant une droite trisauteuse. L'application birationnelle de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{I}_3$ s'étend à $\mathbf{F}$ de telle sorte qu'elle devienne un isomorphisme sur un voisinage de $\mathbf{F}_2$ dans $\mathbf{F}$. Elle identifie $\mathbf{F}_2$ et $\mathbf{I}_3^1$. Ceci permet de décrire $\mathbf{I}_3^1$ comme l'éclatement de $\mathbf{R}_2$ dans $\mathbf{R}$. On fait la même construction avec $\mathbf{F}_3$.

On étudie la sous-variété $\partial\mathbf{I}_3$ de $\mathrm{M}_{\mathbf{P}_3}(0,3,0)$ formée par les faisceaux sans torsion non localement libres dont le bidual est un instanton de degré 1 et tels que le conoyau de l'injection canonique dans ce bidual est une thêta-caractéristique (décalée de 2) sur une conique lisse. Les faisceaux E de cette famille sont donc donnés par les noyaux de surjections $E'' \to \theta(2)$, où E'' est un instanton de degré 1 et θ est une thêta-caractéristique sur une conique lisse. Cette famille est irréductible de dimension 20. Sur un ouvert de $\partial\mathbf{I}_3$, les faisceaux E ont une cohomologie naturelle.

Sur l'ouvert $\mathbf{U}$ de $\mathrm{M}_{\mathbf{P}_3}(0,3,0)$ formé par les faisceaux à cohomologie naturelle (donc minimale), on sait définir un morphisme vers $\mathbf{F}$. Si E est un tel faisceau, alors on a les égalités $\mathrm{h}^1E(-1)=3$, $\mathrm{h}^1E=4$ et $\mathrm{h}^1E(1)=1$. Ainsi, on définit un premier morphisme f_0 vers $\mathbf{R}$ qui prolonge celui de [1] en associant à E le réseau $\mathrm{H}^1E(-1)\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\mathrm{S}^2\check{V}$. Au-dessus de ce réseau, on associe à E un quotient de rang 4 de $R\otimes V$ donné par $\mathrm{H}^1E(-1)\otimes V\to\mathrm{H}^1E$ qui nous donne le morphisme f souhaité. Ce morphisme est ainsi défini sur l'ouvert $\partial\mathbf{U}$ de $\partial\mathbf{I}_3$ formé par les faisceaux à cohomologie naturelle.

Il existe sur un ouvert de $\mathbf{R}_4$ (et donc sur un ouvert de $\mathbf{F}$) un morphisme g réciproque (*voir* [1]). On va le prolonger à un ouvert de $\mathbf{F}_3$.

PROPOSITION 2. – *Le morphisme f restreint à $\partial\mathbf{U}$ est à valeurs dans $\mathbf{F}_3$ et est dominant sur $\mathbf{F}_3$. De plus, sur son image, on définit une réciproque g à f.*

Démonstration. – On commence par montrer que, sur l'image de $\partial\mathbf{U}$, on sait définir une réciproque à f. En effet, la réciproque est donnée de la façon suivante : soit R le réseau et W le quotient de $R\otimes V$. Les applications linéaires $R\otimes V\to W$ et $W\to\check{V}$ nous donnent un complexe :

$$R\otimes\Omega^2(2)\longrightarrow W\otimes\Omega^1(1)\longrightarrow\mathcal{O}_{\mathbf{P}}$$

et la cohomologie au centre (décalée de 1) de ce complexe nous donne le faisceau recherché. En effet, si le réseau R et le quotient W sont assez généraux, le faisceau ainsi obtenu est dans $\mathrm{M}_{\mathbf{P}_3}(0,3,0)$. Soit E dans $\partial\mathbf{U}$, la suite spectrale de Beilinson nous dit que le faisceau $E(1)$ est la cohomologie du complexe précédent si on prend $R=\mathrm{H}^1E(-1)$, $W=\mathrm{H}^1E$ et que l'on identifie $\mathrm{H}^1E(1)$ à $\mathbf{C}$. Les applications linéaires sont les multiplications du module de Rao de E. Ainsi, sur l'image de $\partial\mathbf{U}$ par f, on a une réciproque g qui prolonge le morphisme défini sur $\mathbf{R}$.

Montrons maintenant que cette image est contenue dans $\mathbf{F}_3$. Pour ceci, il suffit de voir que le réseau associé, qui est $\mathrm{H}^1E(-1)\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\mathrm{S}^2\check{V}$ est tel que l'application $\mathrm{H}^1E(-1)\otimes V\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\check{V}$ soit de rang trois. Cette application se décompose en deux applications : $\mathrm{H}^1E(-1)\otimes V\to\mathrm{H}^1E$ qui est génériquement surjective et $\mathrm{H}^1E\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\check{V}$. Mais si notre faisceau est donné par la suite exacte

$$0\longrightarrow E\longrightarrow E''\longrightarrow\theta(2)\longrightarrow 0,$$

alors H^1E s'identifie à $\mathrm{H}^0\theta(2)$ et $\mathrm{H}^1E(1)$ est un quotient de rang 1 de $\mathrm{H}^0\theta(3)$. La multiplication du module de Rao est donc nulle pour l'élément H de V qui définit le plan de la conique. Ainsi, l'application $\mathrm{H}^1E\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\check{V}$ est de rang trois et a pour image $(V/H)\check{}$. Par conséquent, l'application $\mathrm{H}^1E(-1)\otimes V\to\mathrm{H}^1E(1)\otimes\check{V}$ est aussi de rang trois car $\mathrm{H}^1E(-1)\otimes V\to\mathrm{H}^1E$ est surjective.

On sait maintenant que f a un morphisme réciproque sur $f(\partial\mathbf{U})$ qui est contenu dans $\mathbf{F}_3$. On sait donc déjà que l'image de $\partial\mathbf{U}$ est de dimension 20. Mais alors, comme $\mathbf{F}_3$ est réduit irréductible et que sa dimension est aussi 20, on sait que $f(\partial\mathbf{U})$ contient un ouvert de $\mathbf{F}_3$ et $f|_{\partial\mathbf{U}}$ est donc dominant sur $\mathbf{F}_3$. □

COROLLAIRE 1. – *Le prolongement de g est birationnel au voisinage de $\mathbf{F}_3$. Dans la description de $\mathbf{I}_3$ avec les réseaux, la variété $\partial\mathbf{I}_3$ est donc le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}$. La famille $\partial\mathbf{I}_3$ forme une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$.*

Démonstration. – On a vu que g est défini sur $f(\partial\mathbf{U})$ qui contient un ouvert de $\mathbf{F}_3$. Ainsi, sur un voisinage (dans $\mathbf{F}$) de cet ouvert, le morphisme g est bien un morphisme réciproque à f. Le morphisme g est bien birationnel au voisinage de $\mathbf{F}_3$.

De plus, on a vu que $\mathbf{F} \to \mathbf{R}$ est l'éclatement de $\mathbf{R}_3$ au voisinage de $\mathbf{F}_3$, donc g identifie cette situation à celle de $\mathbf{I}_3$ et $\partial\mathbf{I}_3$. On voit donc que $\partial\mathbf{I}_3$ est adhérente à $\mathbf{I}_3$ et que dans la description de $\mathbf{I}_3$ avec les réseaux, la variété $\partial\mathbf{I}_3$ est le diviseur exceptionnel de l'éclatement de $\mathbf{R}_3$ dans $\mathbf{R}$ et forme donc une composante irréductible du bord de $\mathbf{I}_3$. $\square$

Remarque 3. – On sait décrire les éléments de saut d'un faisceau E de $\partial\mathbf{I}_3$.

Les plans instables forment une courbe dans $\check{\mathbf{P}}_3$ de degré 6 et de genre 3 ayant un point triple au point correspondant au plan de la conique et dont la courbe des trisécantes est tracée sur le complexe de droites associé au bidual.

Les droites bisauteuses forment une courbe de degré 8 et de genre 3 de la Grassmannienne qui est réunion d'une quintique rationnelle tracée sur le complexe de droites défini par le bidual et d'une cubique tracée dans le (β)-plan des droites du plan de la conique.

Il y a un lien entre ces deux courbes de saut. Les droites bisauteuses sont les trisécantes à la courbe des plans instables. Réciproquement, la courbe des plans instables forme le lieu triple de la surface réglée décrite par les droites bisauteuses.

Remerciements. Je tiens à remercier ici mon directeur de thèse Laurent Gruson pour toute l'aide qu'il m'a apportée durant la préparation de ce travail.

Références bibliographiques

[1] Gruson L., Skiti M., 3-instantons et réseaux de quadriques, Math. Ann. 298 (1994).
[2] Narashiman M.S., Trautmann G., Compactification of $\mathrm{M}_{\mathbf{P}}(0,2)$ and Poncelet pairs of conics, Pacific J. Math. 145 (1990).
[3] Okonek C., Schneider M., Spindler H., Vector Bundles on Complex Projective Spaces, Birkhäuser, Basel, 1980.